

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Formulação com Dupla Reciprocidade
Hipersingular do Método dos Elementos de
Contorno para Problemas de Potencial
Escalar Bidimensionais

Dissertação de mestrado

Vitória, ES

2009

Rodrigo Guerra Peixoto

Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas de Potencial Escalar Bidimensionais

Dissertação de mestrado

Dissertação apresentada ao Programa da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Vitória, ES

2009

Rodrigo Guerra Peixoto

Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas de Potencial Escalar Bidimensionais

Dissertação de mestrado

Dissertação apresentada ao Programa da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler - UFES - orientador

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro - UFES

Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago - COPPE/UFRJ

À vovó Cininha, cujos ensinamentos, bondade e
alegria de viver fizeram com que este trabalho
fosse concluído em dias um pouco tristes.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Tânia Mara e Paulo Roberto, maiores responsáveis pela minha educação (com todos os significados que se pode atribuir a esta palavra), pelo incentivo, confiança e, principalmente, amor.

À Danielle Raidan Daniel, em quem descobri a real razão da minha mudança para o Espírito Santo, pelo carinho, companheirismo e paciência.

Ao Professor Carlos Friedrich Loeffler pela orientação, flexibilidade e motivação.

Aos Engenheiros Sérgio Gonçalves Mileipe e Thiago Guimarães Coelho por viabilizarem este trabalho apesar dos meus compromissos profissionais.

RESUMO

A Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno foi inicialmente desenvolvida para problemas harmônicos e elastostáticos. Problemas de mecânica da fratura, pela exigência de duas equações distintas para uma mesma partícula em determinada posição, compõem seu campo de aplicação mais comum atualmente.

Tal formulação, entretanto, jamais foi trabalhada quando cargas de domínio estão presentes no problema de potencial escalar.

No presente trabalho, o termo referente ao carregamento externo é tratado sob a óptica da Formulação da Dupla Reciprocidade, onde as matrizes recorrentes não são mais aquelas com integrais singulares, e sim aquelas com integrais hipersingulares da formulação supracitada.

Alguns exemplos-teste foram selecionados para validação da técnica, apontando para resultados coerentes, tanto em comparação com a Formulação da Dupla Reciprocidade Singular, como em comparação com os cálculos analíticos.

Os resultados mostram que as derivadas do potencial são melhor determinadas, pela formulação estudada, do que o próprio potencial. Não foram encontrados, no entanto, subsídios suficientes que confirmem a afirmação recorrente de um melhor comportamento da equação integral de contorno hipersingular quando gradientes de ordem elevada do potencial estão envolvidos.

ABSTRACT

The Boundary Element Method Hyper-singular Formulation has been initially evaluated to harmonic and elastostatic problems. Fracture mechanics problems, which require two distinct equations for the same particle at some position, constitute its most common application field actually.

This formulation, however, never has been studied when domain loads are present in the potential scalar problem.

In this work, the external load term is treated by the Dual Reciprocity Formulation, where the repeated matrices are not the ones with singular integrals, but that with hyper-singular integrals of the formulation cited above.

Test examples have been selected to validate the technique, pointing to coherent results by comparing to both Singular Dual Reciprocity Formulation and analytical calculations.

The results show that the potential derivatives are better determined, by the studied formulation, than the potential itself. However, there is no sufficient evidence to confirm the idea that the hyper-singular boundary integral equation works better when high potential gradients are involved.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Domínio bidimensional $\Omega(\mathbf{X})$, delimitado pela curva $\Gamma(\mathbf{X})$	5
Figura 2.2 - Domínio aumentado	7
Figura 2.3 - Representação do vetor normal externo à superfície aumentada	8
Figura 2.4 - Contorno suave com o setor circular aumentado	11
Figura 4.1 - Barra homogênea vertical submetida ao peso próprio	33
Figura 4.2 - Malha com 16 elementos	34
Figura 4.3 - Malha com 32 elementos	34
Figura 4.4 - Malha com 64 elementos	35
Figura 4.5 - Posicionamento de 4 pontos internos constitutivos	35
Figura 4.6 - Posicionamento de 9 pontos internos constitutivos	35
Figura 4.7 - Posicionamento de 16 pontos internos constitutivos	35
Figura 4.8 - Posicionamento de 28 pontos internos constitutivos	36
Figura 4.9 - Exemplo 1; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos	38
Figura 4.10 - Exemplo 1; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões	38
Figura 4.11 - Exemplo 1; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos	38
Figura 4.12 - Exemplo 1; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões	39
Figura 4.13 - Exemplo 1; comparação dos deslocamentos da FDRS com os resultados analíticos	39
Figura 4.14 - Exemplo 1; comparação dos deslocamentos da FDRH com os resultados analíticos	40
Figura 4.15 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; deslocamentos	41
Figura 4.16 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; tensões	41
Figura 4.17 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; deslocamentos	42
Figura 4.18 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; tensões	42
Figura 4.19 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; deslocamentos	42
Figura 4.20 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; tensões	43
Figura 4.21 - Exemplo 2; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos	44
Figura 4.22 - Exemplo 2; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões	44

Figura 4.23 - Exemplo 2; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos	44
Figura 4.24 - Exemplo 2; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões	45
Figura 4.25 - Exemplo 2; comparação dos deslocamentos da FDRS com os resultados analíticos	45
Figura 4.26 - Exemplo 2; comparação dos deslocamentos da FDRH com os resultados analíticos	46
Figura 4.27 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; deslocamentos	47
Figura 4.28 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; tensões	47
Figura 4.29 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; deslocamentos	48
Figura 4.30 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; tensões	48
Figura 4.31 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; deslocamentos	48
Figura 4.32 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; tensões	49
Figura 4.33 - Barra prismática de seção retangular sujeita a torção	49
Figura 4.34 - Membrana retangular sujeita à tração no contorno e pressão constantes	50
Figura 4.35 - Exemplo 3; Erros globais médios; 9 Pontos Internos	52
Figura 4.36 - Exemplo 3; Erros médios no contorno, excluindo vértices; 9 Pontos Internos	52
Figura 4.37 - Exemplo 3; Erros médios nos pontos internos constitutivos; 9 Pontos Internos	52
Figura 4.38 - Torção; 64 elementos; erros globais médios	54
Figura 4.39 - Torção; 64 elementos; erros médios nos pontos internos	54
Figura 4.40 - Torção; 64 elementos; erros médios no contorno	55
Figura 4.41 - Torção; 64 elementos; erros médios no contorno excluindo vértices	55
Figura 4.42 - Torção; 64 elementos; erros médios nos elementos adjacentes aos vértices	56
Figura 4.43 - Torção; 32 elementos; erros médios nos elementos adjacentes aos vértices	56
Figura 4.44 - Perfil de desvios na aresta $x_1=0$ para 32 elementos e 16 PI	57
Figura 4.45 - Perfil de desvios na aresta $x_1=0$ para 64 elementos e 16	57
Figura 4.46 - Perfil de desvios na extremidade da aresta $x_1=0$ para 32 elementos e 16 PI	57
Figura 4.47 - Perfil de desvios na extremidade da aresta $x_1=0$ para 64 elementos e 16 PI	58
Figura 4.48 - Perfil de desvios no interior da aresta $x_1=0$ para 32 elementos e 16 PI	58
Figura 4.49 - Perfil de desvios no interior da aresta $x_1=0$ para 64 elementos e 16 PI	58

Figura A.1 - Problema correlato para equação de Laplace	63
Figura A.2 - Distância entre o ponto fonte do problema correlato e um ponto qualquer do domínio ...	64
Figura B.1 - Setor circular de integração	67
Figura C.1 - Domínio do Problema	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Configuração com 4 Pontos Internos	36
Tabela 4.2 - Configuração com 9 Pontos Internos	36
Tabela 4.3 - Configuração com 16 Pontos Internos	36
Tabela 4.4 - Configuração com 28 Pontos Internos	37
Tabela 4.5 - Erros percentuais médios para deslocamentos; barra homogênea	40
Tabela 4.6 - Erros percentuais médios para tensões; barra homogênea	41
Tabela 4.7 - Erros percentuais médios para deslocamentos; barra de densidade variável	46
Tabela 4.8 - Erros percentuais médios para tensões; barra de densidade variável	47
Tabela 4.9 - Erros percentuais médios para torção; funções radiais simples	53
Tabela 4.10 - Erros percentuais médios para torção; funções radiais cúbicas	54

SUMÁRIO

CAPITULO I - INTRODUÇÃO	1
1.1 Comentários Preliminares	1
1.2 Objetivo do Trabalho	2
1.3 Resenha Bibliográfica	2
1.4 Estrutura do Trabalho	3
CAPITULO II - TRATAMENTO DO PROBLEMA DE LAPLACE BIDIMENSIONAL	5
2.1 Equacionamento Básico	5
2.2 Formulação Singular Clássica	7
2.3 Formulação Hipersingular	11
CAPITULO III - TRATAMENTO DO PROBLEMA DE POISSON BIDIMENSIONAL	17
3.1 Equacionamento Básico	17
3.2 Formulação com Dupla Reciprocidade Singular	17
3.3 Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular	21
3.4 Pontos Internos Constitutivos	27
3.4.1 Pontos Internos na Formulação com Dupla Reciprocidade Singular	28
3.4.2 Pontos Internos na Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular	29
CAPITULO IV - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	33
4.1 Primeiro Exemplo: Barra Homogênea Submetida ao Peso Próprio	33
4.1.1 Análise de malhas	37
4.1.2 Comparação entre as Formulações	39
4.2 Segundo Exemplo: Barra de Massa Variável Submetida ao Peso Próprio	43
4.2.1 Análise de malhas	43
4.2.2 Comparação entre as Formulações	45
4.3 Terceiro Exemplo: Torção em Barras de Seção Transversal Retangular	49

4.3.1 Análise de malhas	52
4.3.2 Comparação entre as Formulações	53
 CAPITULO V - CONCLUSÕES	 61
5.1 Sobre a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular	61
5.2 Uma Breve Comparação Entre a FDRS e a FDRH	61
5.3 Desenvolvimentos Futuros	62
 APENDICE A - PROBLEMA CORRELATO E SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	 63
 APENDICE B - INTEGRAIS AO LONGO DO CONTORNO AMPLIADO PARA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR	 67
 APENDICE C - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA TORÇÃO; ANALOGIA COM A MEMBRANA	 71
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 75

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Comentários Preliminares

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é atualmente uma das principais técnicas de solução numérica, direcionado ao tratamento de problemas físicos cujos modelos matemáticos são regidos por equações diferenciais parciais. Destaca-se entre os demais métodos por apresentar uma solução aproximada do problema proposto, mediante discretização exclusiva do contorno físico envolvido. É, portanto, um método de fácil aplicação e de inegáveis vantagens operacionais, por reduzir, em uma unidade, a dimensão do problema.

Em função dessas qualidades, intensas pesquisas procuram ampliar seu campo de aplicação, ao mesmo tempo em que se elaboram códigos ou aplicativos computacionais de uso industrial, resultando na conquista de espaço comercial.

Existem várias formulações que podem ser consideradas pertinentes ao Método dos Elementos de Contorno, mas a mais comum é denominada de formulação direta ou clássica [1], na qual as variáveis básicas ou primais do problema são resolvidas, simultaneamente, com suas derivadas normais. Nesta formulação, a partir de uma equação diferencial de governo, busca-se transformá-la numa equação integral de contorno, usualmente posta na denominada forma inversa, seguida pela definição de pontos fonte, com o emprego de técnicas típicas do Método dos Resíduos Ponderados (MRP), e por fim, pela discretização do contorno físico.

Uma das muitas vantagens do MEC, com relação a outros métodos discretos, consiste da simplicidade e precisão com que ele trata a obtenção de valores da variável básica (ou potencial) do problema em pontos situados no interior. Embora o MEC, por não ser uma técnica de domínio, não os calcule diretamente, o emprego recursivo da equação integral de contorno, durante a fase de processamento ou mesmo no pós-processamento, permite obtê-los facilmente, com elevada precisão. Tal exatidão pode ser justificada pela estreita relação existente entre as formas aproximadas da equação integral de contorno e o MRP.

Essa mesma precisão se reflete no cálculo das derivadas do potencial no interior do domínio, algo que normalmente resulta em resultados menos eficazes em outros métodos.

Para se calcular valores dessa derivada do potencial em pontos internos, utiliza-se um procedimento muito simples: deriva-se analiticamente a equação integral de governo, antes de qualquer aproximação, o que justifica então, sua elevada precisão.

Quando tais procedimentos são realizados no interior do domínio, não surgem problemas relacionados à singularidade das funções constituintes dos núcleos das equações integrais, pois seus integrandos estão associados à varredura no contorno, enquanto os pontos base são pontos internos.

O MEC, por outro lado, não apresenta bom comportamento em problemas onde o domínio possui grandes não-homogeneidades em suas propriedades ou ainda, quando uma dimensão deste domínio possui ordem de grandeza muito inferior às demais, sem poder, no entanto, ser desprezada, como em certos problemas envolvendo estruturas delgadas [2]. Deve-se destacar, porém, o sucesso da técnica, quando comparada com outros métodos, na solução de problemas envolvendo contato e mecânica da fratura. A ambos estão associadas fortes não-linearidades e o segundo, em particular, consagra a aplicabilidade da Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno [3], por requerer duas equações integrais distintas para partículas num mesmo ponto de uma trinca. Neste caso, uma equação é dada pela Formulação Singular e a outra, pela Hipersingular.

A origem da Formulação Hipersingular, porém, está associada à necessidade da obtenção de derivadas direcionais do potencial no contorno em vários problemas físicos.

Em problemas de elasticidade, por exemplo, é de grande interesse o cálculo dessas derivadas do deslocamento, que é a variável primal nesse caso, com o propósito de se determinar tensões tangenciais no contorno com maior precisão. A ideia foi estendida posteriormente aos problemas de potencial escalar bidimensional, pois em várias aplicações, como nos casos onde se deseja conhecer o campo de velocidades a partir de um potencial de pressão, é indispensável determinarem-se tanto as componentes de velocidade normal como tangencial.

Em razão da ampliação da ordem das singularidades dos núcleos das integrais, um tratamento matemático relativamente mais extenso ao da formulação clássica do MEC deve ser empreendido, com o propósito de levantar adequadamente o limite quando o ponto fonte posiciona-se no contorno [4].

1.2 Objetivo do Trabalho

Embora haja diversos trabalhos relacionados ao desenvolvimento da Formulação Hipersingular em problemas de potencial escalar bem como na elastostática, em duas e três dimensões, o tema não é difundido o suficiente para ser encontrado nos melhores livros sobre o MEC, sendo discutido em detalhe ou profundidade.

São comuns as afirmações de que, geralmente, a Formulação Hipersingular apresenta desempenho bastante satisfatório quando elevados gradientes das variáveis primais se apresentam no problema que se quer resolver. De certo modo, se ratificado esse comportamento, os problemas mais usuais em que a formulação é aplicada, os casos da Mecânica da Fratura, são exatamente problemas dessa natureza.

Na literatura especializada, não foi feito ainda nenhum desenvolvimento da Formulação Hipersingular do MEC para problemas governados pela equação de Poisson e abordados pela Formulação com Dupla Reciprocidade [5], que notoriamente é a formulação mais adequada para o tratamento desses casos, já que evita a utilização de recursos complementares de discretização do interior do domínio.

O objetivo desse trabalho, portanto, é desenvolver a Formulação Hipersingular com Dupla Reciprocidade, aplicável aos problemas de potencial escalar expressos pela Equação de Poisson.

1.3 Resenha Bibliográfica

Conforme exposto, não foi identificado nenhum trabalho na literatura especializada que versasse sobre o desenvolvimento da Formulação Hipersingular com Dupla Reciprocidade. O tema, entretanto, é abordado com detalhe em vários artigos e publicações.

Destacam-se, inicialmente, os trabalhos de Prado [6], que se iniciaram com sua dissertação de mestrado, e apresentaram resultados para aplicações tanto na teoria do potencial escalar quanto na elasticidade. As simulações ainda apresentam imprecisões devidas ao pouco conhecimento com relação a algumas condições matemáticas que cercam a questão da hipersingularidade.

Na ocasião, a perceber pela bibliografia encontrada no trabalho de Prado, Cerrolaza em 1988 e Ingber & Mitra em 1989 eram os trabalhos mais destacados e recentes nessa área, seguindo as diretrizes do trabalho de Cruse, elaborado em 1977 para determinação de tensões no contorno de problemas elastostáticos.

O trabalho de Mansur *et. al.* [4], destaca-se pela extensa e cuidadosa abordagem da existência das integrais hipersingulares, que não são impróprias. O citado trabalho apresenta também o devido formalismo que se deve seguir na obtenção da equação integral de contorno hipersingular.

Os trabalhos de Huacasi *et. al.* [7] também devem ser citados pela utilidade, não obstante ser direcionado a uma aplicação tridimensional da Formulação Hipersingular do MEC.

As notas de curso do Professor G. Paulino [8] da *University of Illinois* também foram muito importantes para clareza inicial dos procedimentos a serem empregados com as integrais hipersingulares.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho foi estruturado em quatro Capítulos e três Apêndices, além desta Introdução.

No primeiro deles, a Equação de Laplace é inicialmente apresentada em sua forma diferencial e trabalhada até a forma integral inversa. A aplicação da solução fundamental de um problema correlato, apresentada no Apêndice A, é, então, introduzida, formando uma equação de governo que contém apenas integrais no contorno e o valor do potencial medido num ponto, dito fonte, no interior do domínio.

A partir desta equação são realizados dois desenvolvimentos. No primeiro deles, o ponto fonte é reposicionado, agora sobre o contorno, gerando a equação integral da Formulação Singular do MEC para o problema de Laplace. A partir da aplicação do método da colocação, que torna finito o espaço dos pontos fonte, e da discretização do contorno físico, o sistema de equações lineares algébricas a ser resolvido é obtido. No segundo, a equação é inicialmente derivada com relação a uma direção, em princípio arbitrária. Segue-se novamente o procedimento de reposicionamento do ponto fonte sobre o contorno, quando a direção de derivação é particularizada para a normal à fronteira. A aplicação novamente do método da colocação e a discretização do contorno geram um novo sistema de equações lineares, referente à Formulação Hipersingular do MEC para esse problema.

No Capítulo 3, a Equação de Poisson, que agrega cargas de domínio à de Laplace, é tratada. As duas abordagens, singular e hipersingular, são novamente realizadas. O desenvolvimento do laplaciano do potencial é idêntico ao realizado no Capítulo 2, de forma que apenas a parcela referente à carga externa é trabalhada.

A técnica empregada é a Formulação da Dupla Reciprocidade (FDR) que, como dito anteriormente, já foi amplamente estudada em conjunto com a Formulação Singular Clássica, mas continuava inexplorada junto à abordagem hipersingular.

No final do Capítulo, as matrizes ampliadas para inclusão de pontos internos constitutivos, importantes na FDR, são apresentadas.

Todas as singularidades presentes nos núcleos das integrais foram examinadas, umas com maior e outras com menor rigor matemático.

Os desenvolvimentos ficaram limitados a domínios bidimensionais e elementos de contorno constantes.

No Capítulo 4, as Formulações Singular e Hipersingular, ambas com Dupla Reciprocidade, são testadas em três exemplos simples. Os dois primeiros, referem-se a uma barra engastada em sua parte superior e sujeita à ação gravitacional. No primeiro, considerou-se a barra com massa específica constante e, no segundo, visando a analisar o comportamento das formulações quando gradientes

maiores da função potencial são envolvidos, considerou-se uma densidade variando parabolicamente com a altura. No terceiro exemplo, a distribuição de tensões cisalhantes numa barra prismática de seção quadrada sujeita a torção foi calculada através da analogia com o problema de uma membrana uniformemente carregada.

No Capítulo 5, algumas conclusões, considerações e sugestões para futuros trabalhos são apresentadas.

CAPITULO II

TRATAMENTO DO PROBLEMA DE LAPLACE BIDIMENSIONAL

2.1 Equacionamento Básico

O problema de Laplace é definido no interior de um domínio finito $\Omega(\mathbf{X})$ e na sua fronteira $\Gamma(\mathbf{X})$, conforme mostra a Figura 2.1, quando um campo vetorial oriundo do gradiente de uma função escalar $u(\mathbf{X})$, apresentar divergente nulo em todos os pontos deste domínio, conforme destacado na Equação (2.1), em sua forma diferencial. As condições de contorno mais comuns são de dois tipos: *essenciais* quando o valor da função escalar é conhecido; *naturais*, quando sua derivada com relação à normal exterior é prescrita. Ambas são respectivamente expostas nas Equações (2.2) e (2.3).

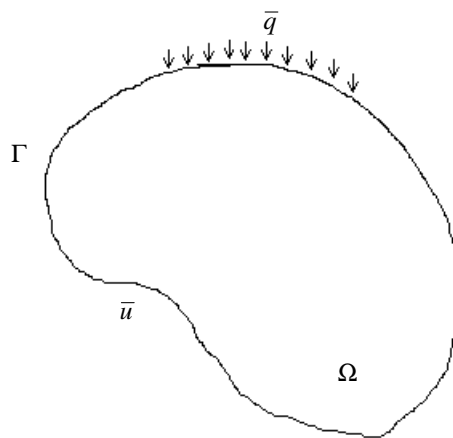


Figura 2.1 - Domínio bidimensional $\Omega(\mathbf{X})$, delimitado pela curva $\Gamma(\mathbf{X})$

$$\nabla \cdot [\nabla u(\mathbf{X})] = \nabla^2 u(\mathbf{X}) = 0 \quad (2.1)$$

$$u(\mathbf{X}) = \bar{u}(\mathbf{X}) \quad \text{prescrito em } \Gamma_u \quad (2.2)$$

$$q(\mathbf{X}) = \frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = \bar{q}(\mathbf{X}) \quad \text{prescrito em } \Gamma_q \quad (2.3)$$

Na Equação (2.3), \mathbf{n} é a direção correspondente ao vetor unitário normal externo ao contorno Γ . À região deste contorno onde as condições essenciais atuam, da-se o nome de Γ_u e, à região onde condições naturais são prescritas, Γ_q .

Alternativamente à forma diferencial apresentada, o problema de Laplace pode ser reescrito em formas integrais equivalentes. Estas formas são vantajosas quando se tem o intuito de empregar métodos aproximados, como o Método dos Elementos Finitos ou o Método dos Elementos de Contorno. Para tanto, faz-se necessária a utilização de uma função auxiliar de ponderação $u^*(\mathbf{X})$, em princípio arbitrária. A simples integração do produto entre o laplaciano de $u(\mathbf{X})$ e $u^*(\mathbf{X})$ no domínio $\Omega(\mathbf{X})$,

conforme mostra a equação a seguir, consiste na representação matemática do problema em questão em sua *forma integral forte*.

$$\int_{\Omega(\mathbf{X})} [\nabla^2 u(\mathbf{X})] u^*(\mathbf{X}) d\Omega = 0 \quad (2.4)$$

O desmembramento da integral (2.4) em outras duas, utilizando a integração por partes, leva à *forma integral fraca* do problema, conforme detalhado na Equação (2.5). É bastante comum a aplicação do Teorema da Divergência nessas condições, conduzindo uma das integrais de domínio a uma integral de contorno.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\mathbf{X})} [\nabla^2 u(\mathbf{X})] u^*(\mathbf{X}) d\Omega &= \int_{\Omega(\mathbf{X})} \nabla \cdot [u^*(\mathbf{X}) \nabla u(\mathbf{X})] d\Omega - \int_{\Omega(\mathbf{X})} [\nabla u(\mathbf{X})] \cdot [\nabla u^*(\mathbf{X})] d\Omega = \\ &= \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) [\mathbf{n}(\mathbf{X}) \cdot \nabla u(\mathbf{X})] d\Gamma - \int_{\Omega(\mathbf{X})} [\nabla u(\mathbf{X})] \cdot [\nabla u^*(\mathbf{X})] d\Omega = \\ &= \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Omega(\mathbf{X})} u_{,i}(\mathbf{X}) u_{,i}^*(\mathbf{X}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

A aplicação de determinadas regras de discretização do domínio à Equação (2.5) é a base do Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos de Contorno, por sua vez, requer um novo desdobramento da integral de domínio remanescente, seguido de nova aplicação do Teorema da Divergência. Este procedimento resulta na *forma integral inversa* do problema de Laplace, apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Omega(\mathbf{X})} u_{,i}(\mathbf{X}) u_{,i}^*(\mathbf{X}) d\Omega &= \\ \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Omega(\mathbf{X})} \nabla \cdot [u(\mathbf{X}) \nabla u^*(\mathbf{X})] d\Omega + \int_{\Omega(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) [\nabla^2 u^*(\mathbf{X})] d\Omega &= \\ \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) [\mathbf{n}(\mathbf{X}) \cdot \nabla u^*(\mathbf{X})] d\Gamma + \int_{\Omega(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) [\nabla^2 u^*(\mathbf{X})] d\Omega &= \\ \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) q^*(\mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Omega(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) [\nabla^2 u^*(\mathbf{X})] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Uma escolha adequada da função de ponderação permite a eliminação da integral de domínio restante e a subsequente obtenção da equação integral típica do Método dos Elementos de Contorno. Adota-se, desta forma, $u^*(\mathbf{X})$ como sendo uma solução específica, denominada *fundamental*, de um problema correlato, de domínio infinito, sujeito a um carregamento pontual, descrito no Apêndice A.

A introdução da Equação (A.1) na Equação (2.6), em conjunto com as propriedades do produto interno envolvendo funções Delta de Dirac, gera a Equação (2.7) a seguir.

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - u(\xi) = 0 \quad (2.7)$$

Esta última equação é o ponto de partida para as *Formulações Singular Clássica e Hipersingular* do Método dos Elementos de Contorno para problemas de Laplace.

2.2 Formulação Singular Clássica

A primeira etapa do desenvolvimento é considerar o ponto ξ como pertencente à fronteira $\Gamma(\mathbf{X})$. Considerando que as Equações (A.3) e (A.9), do Apêndice A, estão presentes nos integrandos da Equação (2.7), observa-se o surgimento de singularidades nestas integrais, quando ξ coincidir com \mathbf{X} . O tratamento matemático dessas singularidades é descrito a seguir.

Para tal, admite-se um domínio Ω' , aumentado por um setor circular de raio ε (Figura 2.2) e, em seguida, toma-se o limite quando este raio tende a zero. A Equação (2.7) fica reescrita na forma (2.8) para esta nova configuração.

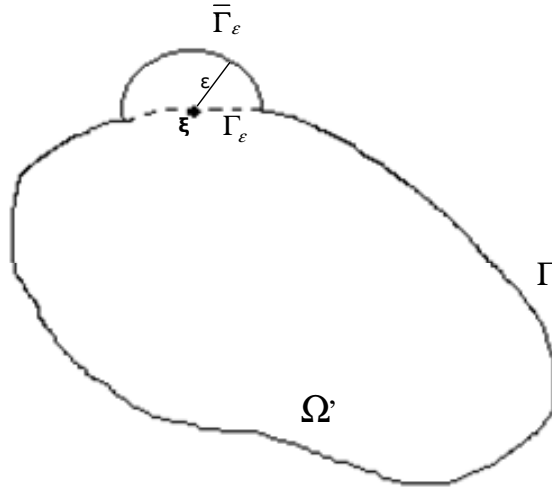


Figura 2.2 - Domínio aumentado

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] - u(\xi) = 0 \quad (2.8)$$

O primeiro termo da Equação (2.8) é integrável em todo o contorno, apesar da singularidade de $u^*(\xi; \mathbf{X})$ quando ξ coincide com \mathbf{X} , conforme detalhado em (2.9).

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a}^a \left(\frac{-1}{2\pi} \ln r \right) dr \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{\pi} \int_{\varepsilon}^a (\ln r) dr \right] = \\ &= \frac{-1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [r \ln(r) - r]_{\varepsilon}^a = \frac{a}{\pi} [1 - \ln(a)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Desse modo, pode-se escrever simplesmente que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \oint_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma$$

O segundo termo da Equação (2.8), por sua vez, merece um tratamento mais minucioso, conforme procedimento descrito a seguir.

Inicialmente, a integral ao longo da curva fechada é desmembrada em duas: uma ao longo da curva aumentada ($\bar{\Gamma}_\varepsilon$) e outra no restante da fronteira, conforme destacado na equação abaixo.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (2.10)$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento, a primeira integral do lado direito da Equação (2.10), *i.e.*, a integral ao longo do setor circular aumentado, é reescrita na equação seguinte, onde nada mais se fez além de adicionar e subtrair uma constante ao integrando.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\xi) d\Gamma \right] \quad (2.11)$$

Para o tratamento do primeiro termo do lado direito da Equação (2.11), considera-se a expansão em série de Taylor, truncada no termo de primeira ordem, para a função potencial, conforme apresentado a seguir.

$$u(\mathbf{X}) \approx u(\xi) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_k(\xi)} [x_k(\mathbf{X}) - x_k(\xi)] \quad (2.12)$$

Utiliza-se também a relação (A.9), do Apêndice A, que fornece o valor de $q^*(\xi; \mathbf{X})$, reescrita para o setor circular aumentado na forma (2.14), após a substituição dos valores das componentes do vetor normal externo, apresentadas em (2.13). O resultado final é apresentado no desenvolvimento (2.15), que aponta valor nulo para esta primeira integral.

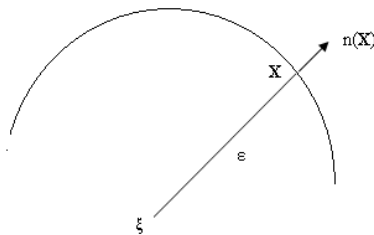


Figura 2.3 - Representação do vetor normal externo à superfície aumentada

$$n_i(\mathbf{X}) = \frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)}{\varepsilon} \quad (2.13)$$

$$q^*(\xi; \mathbf{X}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} n_i(\mathbf{X})n_i(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] d\Gamma \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_k(\xi)} n_k(\mathbf{X}) \right] d\Gamma \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_\varepsilon} \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_k(\xi)} n_k(\mathbf{X}) \right] \varepsilon d\theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Desta forma, a relação (2.11) fica simplificada na Equação (2.16), exposta a seguir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (2.16)$$

Retornando à Equação (2.10), a segunda integral do lado direito apresentaria singularidade no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. No entanto, seu núcleo é formado por funções hiperbólicas que, acompanhadas do produto $r_i n_i$, apresentam sinais distintos antes e após a singularidade, se auto-compensando. Diz-se então, que a integral é convergente no sentido do valor principal de Cauchy.

Com estes argumentos e o resultado apresentado em (2.16), a Equação (2.10) fica reescrita na forma (2.17) a seguir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] + VPC \left\{ \oint_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (2.17)$$

Substituindo este resultado na Equação (2.8) e considerando os argumentos de integrabilidade apresentados em (2.9), obtém-se:

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - VPC \left\{ \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right\} - \left\{ 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \right\} u(\xi) = 0$$

ou

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - VPC \left\{ \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right\} - c(\xi) u(\xi) = 0 \quad (2.18)$$

O sistema de equações lineares do Método dos Elementos de Contorno pode ser obtido com a aplicação de uma variante do Método dos Resíduos Ponderados à Equação (2.18), seguida da

discretização física do contorno. Considerando, em particular, a aplicação do método da colocação para N pontos ξ^i , ditos pontos de colocação ou pontos fonte, geram-se as Equações (2.19) a seguir.

$$\int_{\Omega^*} \left[\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] \Delta(\xi^i; \xi) d\Omega - \int_{\Omega^*} \left[\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma \right] \Delta(\xi^i; \xi) d\Omega - \int_{\Omega^*} c(\xi) u(\xi) \Delta(\xi^i; \xi) d\Omega = 0$$

$$\Omega^* \subset \Omega$$

$$\xi^i \in \Gamma$$

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi^i; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi^i; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma - c(\xi^i) u(\xi^i) = 0 \quad (2.19)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Procedendo a discretização do contorno e considerando $u(\mathbf{X})$ e $q(\mathbf{X})$ constantes dentro de cada elemento, as N equações representadas por (2.19) são reescritas na forma:

$$\sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - c(\xi^i) u(\xi^i) = 0 \quad (2.20)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Em (2.20), foi considerado que a discretização do contorno gerou N elementos. Q^e e U^e são os valores constantes de $u(\mathbf{X})$ e $q(\mathbf{X})$ dentro de cada elemento. Os elementos de contorno aqui considerados são, desta forma, denominados *constantess*.

É conveniente a escolha dos pontos ξ^i coincidentes com os pontos centrais de cada elemento de contorno, \mathbf{X}_e . Assim, $u(\xi^i) = U^i$.

Quando $i=e$, as integrais da Equação (2.20) podem ser calculadas analiticamente. Para as demais, deve-se aplicar um procedimento numérico, como a quadratura de Gauss. Como resultado obtém-se o sistema de equações lineares apresentado em (2.21) a seguir.

$$\mathbf{H}\{\mathbf{u}\} - \mathbf{G}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$H_{ie} = \begin{cases} \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i \neq e \\ c(\xi^i) + \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i = e \end{cases} \quad (2.21)$$

$$G_{ie} = \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma$$

De maneira geral, $c(\xi)$ também pode ser determinado analiticamente. No caso de contornos suaves, este procedimento é detalhado a seguir.

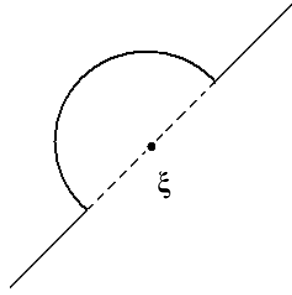


Figura 2.4 - Contorno suave com o setor circular aumentado.

$$c(\xi) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = 1 - \frac{1}{2\pi} (\pi) = \frac{1}{2} \quad (2.22)$$

2.3 Formulação Hipersingular

Derivando-se a Equação (2.7) com relação a uma dada direção $\mathbf{n}(\xi)$ no ponto ξ , obtém-se a equação a seguir, onde $\bar{q}^*(\xi; \mathbf{X})$ e $p^*(\xi; \mathbf{X})$ são dadas pelas Equações (A.10) e (A.11) do Apêndice A, respectivamente.

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)} = 0 \quad (2.23)$$

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - q(\xi) = 0$$

No posicionamento de ξ sobre o contorno, assim como na formulação clássica precedente, surgem singularidades nos núcleos das integrais anteriores, agora de ordem ainda maior. O tratamento dessas singularidades para obtenção do sistema de equações lineares resolvível numericamente é apresentado a seguir, considerando novamente o domínio aumentado por um setor circular. Neste setor circular, $\bar{q}^*(\xi; \mathbf{X})$ e $p^*(\xi; \mathbf{X})$ são simplificadas abaixo, nas relações (2.24) e (2.25), onde a Equação (2.13) foi utilizada.

$$\bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi) \quad (2.24)$$

$$p^*(\xi; \mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \{ 2[-n_i(\mathbf{X})] n_j(\mathbf{X}) n_i(\xi) n_j(\mathbf{X}) + n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi) \} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi) \quad (2.25)$$

A Equação (2.23), por sua vez, é reescrita na forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] - q(\xi) = 0 \quad (2.26)$$

Inicialmente é dada atenção ao primeiro termo da Equação (2.26), cujo desmembramento em duas integrais, uma no setor circular aumentado e outra ao longo do restante da fronteira, é apresentado em (2.27):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (2.27)$$

Os argumentos de integrabilidade apresentados para a segunda integral do lado direito da Equação (2.10) permanecem válidos aqui para a segunda integral do lado direito da Equação (2.27) quando contornos suaves são considerados. Já a integral ao longo do setor circular de raio ε assume a forma apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial x_j(\mathbf{X})} \right) n_j(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial x_j(\mathbf{X})} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com isso, a Equação (2.27) assume a forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial x_j(\mathbf{X})} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] + VPC \oint_{\Gamma} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma \quad (2.29)$$

Trabalhando agora o segundo termo da Equação (2.26), tem-se o desmembramento apresentado em (2.30).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (2.30)$$

Somando-se a $u(\mathbf{X})$ um campo uniforme em todo o domínio, suas derivadas não sofrerão modificações. Particularmente, escolhe-se este campo como sendo $[-u(\xi)]$ e a Equação (2.30) assume a forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (2.31)$$

Aplicando as Equações (2.12), (2.13) e (2.25) ao primeiro termo da direita da Equação (2.31), tem-se o resultado apresentado em (2.32) a seguir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; \mathbf{X}) [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) \frac{[x_j(\mathbf{X}) - x_j(\xi)]}{\varepsilon} d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (2.32)$$

O segundo termo da direita da Equação (2.31) pode ser reescrito como apresentado abaixo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - u(\xi) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (2.33)$$

Para melhor operacionalização do termo precedente, considera-se a relação destacada na Equação (2.34), em que foi utilizado o Teorema da Divergência e a definição da solução fundamental.

$$\oint_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \oint_{\Gamma} [u^*,_{,i}(\xi; \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X})] d\Gamma = \int_{\Omega} [u^*,_{,ii}(\xi; \mathbf{X})] d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta(\xi; \mathbf{X}) d\Omega \quad (2.34)$$

Considerando a propriedade da função Delta de Dirac apresentada a seguir em (2.35) e tomando a derivada normal, no ponto ξ , da relação (2.34), chega-se ao resultado (2.36).

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \Delta(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Omega(x) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial n(\xi)} \quad (2.35)$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma = \oint_{\Gamma} p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Omega = - \frac{\partial(1)}{\partial n(\xi)} = 0 \quad (2.36)$$

Com isso, o último termo da Equação (2.33) é anulado. Considerando-se também o comportamento do núcleo da integral restante em (2.33), antes e após o ponto singular, tem-se convergência no sentido do valor principal de Cauchy, como representado a seguir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [u(\mathbf{X}) - u(\xi)] p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] = VPC \left\{ \oint_{\Gamma} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (2.37)$$

Com os resultados (2.32) e (2.37), a Equação (2.31) assume a forma destacada em (2.38).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] + VPC \left\{ \oint_{\Gamma} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (2.38)$$

As Equações (2.29) e (2.38) são agora utilizadas para reescrever a Equação (2.26) na forma apresentada a seguir.

$$I_1 + I_2 + VPC \oint_{\Gamma} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - VPC \oint_{\Gamma} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - q(\xi) = 0 \quad (2.39)$$

onde

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial x_j(\mathbf{X})} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (2.39a)$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (2.39b)$$

Entendendo que no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a magnitude dos gradientes de $u(\mathbf{X})$ pode ser tomada como constante, variando apenas suas direções ao longo das integrações (2.39a) e (2.39b), estas duas expressões podem ser somadas como na Equação (2.40).

$$I_1 + I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (2.40)$$

Com o desenvolvimento da Equação (2.40), explicitado no Apêndice B, obtém-se uma função do fluxo normal em ξ , como apresentado a seguir, com $s(\xi)$ e $w_k(\xi)$ dados em (2.42) a (2.44), onde θ_1 e θ_2 são os ângulos inicial e final do setor circular aumentado.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] = s(\xi)q(\xi) + w_k(\xi)q_k(\xi) \quad (2.41)$$

$$s(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (2.42)$$

$$w_1(\xi) = \frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \quad (2.43)$$

$$w_2(\xi) = -\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \quad (2.44)$$

Desta forma, a Equação (2.39) pode ser reescrita na forma:

$$VPC \oint_{\Gamma} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - VPC \oint_{\Gamma} u(\mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - q(\xi) + s(\xi)q(\xi) + w_k(\xi)q_k(\xi) = 0 \quad (2.45)$$

Utilizando-se o método da colocação, de forma análoga ao realizado em (2.19), obtém-se as Equações (2.46) a seguir.

$$\oint_{\Gamma} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma} u(\mathbf{X}) p^*(\xi^i; \mathbf{X}) d\Gamma - q(\xi^i) + s(\xi^i)q(\xi^i) + w_k(\xi^i)q_k(\xi^i) = 0 \quad (2.46)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Considerando a discretização do contorno em elementos constantes, chega-se às Equações (2.47).

$$\sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + [s(\xi^i) - 1]q(\xi^i) + w_k(\xi^i)q_k(\xi^i) = 0 \quad (2.47)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Pela presença da parcela $w_k(\xi^i)q_k(\xi^i)$, a Formulação Hipersingular exige, *a priori*, a colocação dos pontos ξ^i em regiões suaves do contorno como tratado a seguir.

Reescrevendo as Equações (2.42) a (2.44) para contornos suaves, *i.e.*, $\theta_1=0$ e $\theta_2=\pi$, são obtidos os seguintes resultados.

$$s(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\pi - 0) = \frac{1}{2} \quad (2.48)$$

$$w_1(\xi) = \frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(0)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\pi) - \text{sen}^2(0)] = 0 \quad (2.49)$$

$$w_2(\xi) = -\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(0)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\pi) - \text{sen}^2(0)] = 0 \quad (2.50)$$

Com isso, para contornos suaves, a Equação (2.47) assume a forma:

$$\sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \frac{1}{2} q(\xi^i) = 0 \quad (2.51)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Resolvendo numericamente as integrais de (2.51), tem-se finalmente, o sistema de equações lineares hipersingular apresentado em (2.52).

$$\mathbf{W}\{\mathbf{u}\} - \mathbf{D}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$W_{ie} = \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \quad (2.52)$$

$$D_{ie} = \begin{cases} \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i \neq e \\ -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i = e \end{cases}$$

CAPITULO III

TRATAMENTO DO PROBLEMA DE POISSON BIDIMENSIONAL

3.1 Equacionamento Básico

A equação diferencial parcial que representa os casos escalares, fisicamente homogêneos e isotrópicos, em que há presença de ações de domínio é denominada Equação de Poisson, apresentada em (3.1).

$$\nabla \cdot [\nabla u(\mathbf{X})] = \nabla^2 u(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

A forma integral inversa para este problema, destacada na Equação (3.2), é obtida seguindo-se procedimentos análogos aos detalhados no capítulo anterior, com auxílio da função de ponderação $u^*(\mathbf{X})$.

$$\oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) q^*(\mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Omega(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) [\nabla^2 u^*(\mathbf{X})] d\Omega = \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\mathbf{X}) d\Omega \quad (3.2)$$

Utilizando novamente a solução fundamental do problema correlato, descrita no Apêndice A, obtém-se, para ξ interno ao contorno $\Gamma(\mathbf{X})$, a Equação (3.3).

$$u(\xi) - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = - \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.3)$$

Esta equação é utilizada para o desenvolvimento das *Formulações com Dupla Reciprocidade Singular e Hipersingular* do Método dos Elementos de Contorno, que são abordadas a seguir.

3.2 Formulação com Dupla Reciprocidade Singular

O lado esquerdo da expressão (3.3) remete à Equação (2.7) do capítulo anterior, e toda a discussão ali realizada se repete aqui, até a obtenção das matrizes da Formulação Singular Clássica para o problema de Laplace, apresentadas em (2.21).

Do ponto de vista do Método dos Elementos de Contorno, o tratamento mais elegante a ser dado à integral de domínio do lado direito da Equação (3.3) recebe o nome de Formulação com Dupla Reciprocidade e é abordado a seguir. Tal denominação se deve ao fato de que as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , obtidas em (2.21), tornam a aparecer.

A formulação em questão foi proposta em 1982 por Nardini e Brebbia [9] e caracteriza-se por exigir apenas integração no contorno, diferentemente de outros métodos, como o das células, que requer uma discretização do domínio.

O primeiro passo se resume a aproximar a carga de domínio $p(\mathbf{X})$ com o emprego de funções auxiliares de base radial, mensuradas a partir de N pontos pré-definidos: \mathbf{X}^j ($j=1, \dots, N$), conforme destacado na Equação (3.4).

$$p(\mathbf{X}) \approx \alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (3.4)$$

onde α^j são constantes de interpolação.

Tais funções auxiliares acarretam numa imprecisão no modelo numérico gerado pela formulação, diferente daquela produzida pela discretização do domínio contínuo e que é típica da maioria dos modelos numéricos. Uma série de pesquisas já foi empreendida no sentido de obter uma melhoria dos resultados, principalmente através do uso de funções mais eficientes. Atualmente é consensual que o erro cometido pelas funções auxiliares pode ser reduzido até limites aceitáveis nas aplicações usuais. Estas funções, devem ainda, possuir primitivas de segunda ordem bem definidas, conforme apresentado em (3.5).

$$F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = \nabla^2 \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (3.5)$$

Com isso, o termo à direita na Equação (3.3) pode ser reescrito na forma (3.6) a seguir.

$$- \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega = -\alpha^j \int_{\Omega(\mathbf{X})} [\Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})] u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.6)$$

$$j = 1, \dots, N$$

As integrais situadas no lado direito da expressão anterior são então desmembradas em $3N$ integrais, utilizando-se o procedimento de integração por partes. Com o auxílio do Teorema da Divergência e da solução fundamental do problema correlato, apresentada no Apêndice A, chega-se ao resultado (3.7) a seguir.

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega &= \alpha^j \left\{ - \int_{\Omega(\mathbf{X})} [u^*(\xi; \mathbf{X}) \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})]_{,i} d\Omega + \int_{\Omega(\mathbf{X})} [u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})] d\Omega \right\} = \\ &\alpha^j \left\{ - \int_{\Omega(\mathbf{X})} [u^*(\xi; \mathbf{X}) \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})]_{,i} d\Omega + \int_{\Omega(\mathbf{X})} [\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) u_{,ii}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega \right\} = \\ &\alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) [n_i \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})] d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) [n_i u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})] d\Gamma + \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} = \end{aligned}$$

$$\alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (3.7)$$

$$j = 1, \dots, N$$

onde n_i são novamente as componentes do vetor normal unitário externo ao contorno Γ e $\eta^j = d\Psi^j/dn$.

Tomando-se cuidado na escolha das funções $F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ de modo que $\eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ e $\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ não introduzam novas singularidades nas integrais acima, todo o procedimento de posicionar ξ no contorno, detalhado no capítulo anterior para a Formulação Singular Clássica, se repete naturalmente para (3.7), gerando a Equação (3.8).

$$- \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega = \alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + c(\xi) \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (3.8)$$

$$j = 1, \dots, N$$

onde,

$$c(\xi) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (3.9)$$

Definindo os pontos ξ^i ($i=1, \dots, N$) e aplicando o método da colocação à Equação (3.8), chega-se ao resultado (3.10).

$$- \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega = \alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) u^*(\xi^i; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi^i; \mathbf{X}) d\Gamma + c(\xi^i) \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) \right\} \quad (3.10)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

Na ausência de pontos internos constitutivos, tratados *a posteriori*, é conveniente que, além de serem definidos em quantidades iguais, os nós funcionais ξ^i sejam coincidentes com os pontos interpolantes da carga de domínio, \mathbf{X}^j .

Finalmente, discretizando o contorno em elementos constantes, obtém-se a Equação (3.11), cuja aplicação de técnicas de integração numérica resulta no vetor apresentado em (3.12).

$$- \int_{\Omega(\mathbf{X})} p(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega = \alpha^j \left\{ - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + c(\xi^i) \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) \right\} \quad (3.11)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$[\mathbf{H}\Psi - \mathbf{G}\eta][\alpha] = [\mathbf{H}\Psi - \mathbf{G}\eta]\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (3.12)$$

$$H_{ie} = \begin{cases} \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i \neq e \\ c(\xi^i) + \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i = e \end{cases}$$

$$G_{ie} = \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma$$

$$\eta_{ej} = \eta(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e)$$

$$\Psi_{ej} = \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e)$$

$$F_{ej} = \nabla^2 \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e)$$

$$p_e = p(\mathbf{X}_e)$$

$$i, j, e = 1, \dots, N$$

Como dito anteriormente, costuma-se utilizar funções de interpolação radiais, devido a sua flexibilidade, invariância, entre outras propriedades. Tais funções são destacadas de maneira genérica nas Equações (3.13) a (3.15) a seguir, onde apenas em (3.14) foi utilizada a notação indicial, explicitando-se assim, a base na qual as derivadas são calculadas.

$$\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = \{ [x_1(\mathbf{X}) - x_1(\mathbf{X}^j)]^2 + [x_2(\mathbf{X}) - x_2(\mathbf{X}^j)]^2 \}^{\lambda/2} = r^\lambda \quad (3.13)$$

$$\eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_i(\mathbf{X})} \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = \lambda r^{\lambda-1} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} \right) n_i(\mathbf{X}) = \lambda r^{\lambda-1} \left(\frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\mathbf{X}^j)}{r} \right) n_i(\mathbf{X}) = \lambda r^{\lambda-2} [x_i(\mathbf{X}) - x_i(\mathbf{X}^j)] n_i(\mathbf{X}) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_i^2(\mathbf{X})} \right\} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i(\mathbf{X})} \{ \lambda r^{\lambda-2} [x_i(\mathbf{X}) - x_i(\mathbf{X}^j)] \} \right\} = \\
&\sum_{i=1}^2 \left\{ (\lambda)(\lambda-2) r^{\lambda-4} [x_i(\mathbf{X}) - x_i(\mathbf{X}^j)]^2 \right\} + \lambda r^{\lambda-2} + \lambda r^{\lambda-2} = \\
&(\lambda)(\lambda-2)(r^{\lambda-4})(r^2) + 2\lambda r^{\lambda-2} = \lambda^2 r^{\lambda-2}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

O sistema de equações lineares completo para a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular é dado por (2.21) e (3.12), resultando na Equação (3.16).

$$\mathbf{H}\{\mathbf{u}\} - \mathbf{G}\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{H}\Psi - \mathbf{G}\eta]\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{H}\Psi - \mathbf{G}\eta]\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\} \tag{3.16}$$

3.3 Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular

As integrais de partida são dadas pela introdução do desenvolvimento (3.7) na Equação (3.3), conforme apresentado na Equação (3.17) a seguir.

$$\begin{aligned}
u(\xi) - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \\
\alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$j = 1, \dots, N$$

De forma análoga ao realizado na Formulação Hipersingular para a equação de Laplace, derivando-se a Equação (3.17) com relação a uma dada direção $\mathbf{n}(\xi)$ no ponto ξ , obtêm-se a Equação (3.18) a seguir, onde $\bar{q}^*(\xi; \mathbf{X})$ e $p^*(\xi; \mathbf{X})$ são dadas pelas Equações (A.10) e (A.11) do Apêndice A, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)} - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} q(\mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma = \\
\alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial n(\xi)} \right\}
\end{aligned}$$

$$j = 1, \dots, N$$

ou

$$q(\xi) - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) q(\mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} p^*(\xi; \mathbf{X}) u(\mathbf{X}) d\Gamma = \alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (3.18)$$

$$j = 1, \dots, N$$

Os termos do lado esquerdo da equação anterior já receberam o tratamento detalhado no item 2.3 do Capítulo 2, referente à Formulação Hipersingular para o problema de Laplace, gerando as matrizes apresentadas em (2.52). A discussão a seguir, refere-se, desta forma, aos termos à direita da Equação (3.18).

O domínio aumentado por um setor circular de raio ε , em torno de ξ , agora considerado sobre o contorno, leva ao resultado (3.19) no limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} = \alpha^j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} = \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - I_3 + I_4 \right\} \quad (3.19)$$

onde

$$I_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.19a)$$

$$I_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.19b)$$

O termo (3.19a) pode ser desmembrado como apresentado em (3.20) a seguir.

$$I_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.20)$$

A integrabilidade do primeiro termo à direita na expressão anterior é novamente justificada pelo núcleo ser formado por funções hiperbólicas que, acompanhadas do produto r, n_i apresentam sinais distintos antes e após a singularidade, se auto-compensando. Pode-se, portanto, reescrevê-lo na forma (3.21).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.21)$$

Já a segunda integral à direita em (3.20) assume a forma apresentada em (3.22), após a introdução da Equação (2.24), que se refere à $\bar{q}^*(\xi; \mathbf{X})$ sobre o contorno aumentado apenas, onde se deve entender que $d\Gamma = \varepsilon d\theta$.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com os resultados (3.21) e (3.22), o termo (3.19a) é reescrito na forma (3.23) a seguir.

$$I_3 = \oint_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (3.23)$$

A atenção agora é voltada para o termo (3.19b), da Equação (3.19), que também é reescrito em duas partes na expressão (3.24); uma para a região aumentada do contorno num setor circular e outra no restante da fronteira.

$$I_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.24)$$

O segundo termo do lado direito na Equação (3.24) pode ser escrito na forma apresentada em (3.25), considerando que a integração se dá apenas no setor circular aumentado e que a Equação (2.25), que representa $p^*(\xi; \mathbf{X})$ nessa região, é utilizada.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \right) [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (3.25)$$

Expandindo $\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ numa série de Taylor de primeira ordem, em torno de ξ , tem-se a relação (3.26), a seguir.

$$\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \approx \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} [x_k(\mathbf{X}) - x_k(\xi)] \quad (3.26)$$

Levando esse último resultado em (3.25) e considerando a Equação (2.13) que representa as componentes do vetor normal no setor circular aumentado, obtém-se a Equação (3.27).

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Pode-se demonstrar, tal como apresenta Mansur et. al. [4], que a equação integral hipersingular deve representar de modo consistente a presença de um potencial constante $u(\xi)$, de tal modo que $\nabla^2 u(\xi) = 0$; assim sendo, pela similaridade dos termos gerados na forma integral inversa da equação de Laplace com as integrais produzidas pela Dupla Reciprocidade, pode-se concluir que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \tag{3.28}$$

Desta forma, o primeiro termo à direita da igualdade na Equação (3.27) expurga a singularidade inerente ao primeiro termo à direita na Equação (3.24), que ocorre apenas quando $\xi = \mathbf{X}$. Assim, a Equação (3.24), ou o termo (3.19b), assume a forma apresentada em (3.29).

$$I_4 = \oint_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \tag{3.29}$$

As Equações (3.23) e (3.29) substituem, respectivamente, os termos (3.19a) e (3.19b) da Equação (3.19), gerando a representação da carga de domínio em integrais de contorno, conforme detalhado em (3.30).

$$\begin{aligned}
& \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} = \\
& \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \oint_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \right. \\
& \left. - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ao gradiente de Ψ^j , aplicam-se os mesmos argumentos que precedem a Equação (2.40) do capítulo anterior, *i.e.*, no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, sua magnitude no ponto ξ pode ser tomada como constante, variando apenas sua direção ao longo da integração no setor circular θ_ε . Com isso, tem-se que:

$$\left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) \quad (3.31)$$

e os dois últimos termos da Equação (3.30) podem ser somados, gerando (3.32).

$$\begin{aligned} \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} = \\ \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] + \right. \\ \left. - \oint_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

Antes de se definir os nós funcionais e discretizar o contorno, deve-se reescrever a integral ao longo do setor circular, na última expressão, numa forma numericamente tratável. Isto é feito de forma idêntica ao procedimento descrito para Formulação Hipersingular para o problema de Laplace e encontra-se detalhado no Apêndice B, item B.2. O resultado final, Equação (B.11), é transcrito aqui, em (3.33).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] = s(\xi) \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) + w_k(\xi) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi) \quad (3.33)$$

Nessa última expressão, os valores de $s(\xi)$ e $w_k(\xi)$ já foram dados em (2.42) a (2.44), sendo θ_1 e θ_2 os ângulos inicial e final do setor circular aumentado respectivamente. Tais resultados são repetidos em (3.34) a (3.36) a seguir.

$$s(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (3.34)$$

$$w_1(\xi) = \frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \quad (3.35)$$

$$w_2(\xi) = -\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \quad (3.36)$$

Substituindo (3.33) em (3.32), tem-se o novo resultado (3.37) para as integrais que representam a carga de domínio.

$$\alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} =$$

$$\alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) [1 - s(\xi)] - w_k(\xi) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \oint_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (3.37)$$

$$j = 1, \dots, N$$

Fazendo uso do método da colocação para a definição de nós funcionais, obtêm-se os termos (3.38), onde novamente, ξ^i são tomados coincidentes com os pontos interpolantes da carga de domínio.

$$\alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) [1 - s(\xi^i)] - w_k(\xi^i) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) - \oint_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}) d\Gamma + \right.$$

$$\left. \oint_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi^i; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \quad (3.38)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

Dividindo o contorno em elementos constantes Γ_e ($e=1, \dots, N$), onde o ponto médio de cada elemento, \mathbf{X}_e , também coincide com os nós funcionais, chega-se às expressões (3.39).

$$\alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) [1 - s(\xi^i)] - w_k(\xi^i) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \right.$$

$$\left. \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \right\} \quad (3.39)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$

Para contornos suaves, os resultados (2.48) a (2.50) se repetem e as expressões (3.39) são reescritas na forma (3.40), gerando o vetor (3.41), após solução numérica das integrais.

$$\alpha^j \left\{ \frac{1}{2} \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \right\}$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N$$
(3.40)

$$[\mathbf{W}\Psi - \mathbf{D}\eta]\{\alpha\} = [\mathbf{W}\Psi - \mathbf{D}\eta]\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\bar{\mathbf{P}}\}$$
(3.41)

$$W_{ie} = \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma$$

$$D_{ie} = \begin{cases} \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i \neq e \\ -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma & \text{para } i = e \end{cases}$$

$$\eta_{ej} = \eta(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e)$$

$$\Psi_{ej} = \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e)$$

$$F_{ej} = \nabla^2 \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e)$$

$$p_e = p(\mathbf{X}_e)$$

$$i, j, e = 1, \dots, N$$

Neste trabalho, apenas funções interpolantes de base radial, como as apresentadas em (3.13) a (3.15), foram testadas.

Por fim, o sistema completo de equações lineares para a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular é representado em (3.42).

$$\mathbf{W}\{\mathbf{u}\} - \mathbf{D}\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{W}\Psi - \mathbf{D}\eta]\{\alpha\} = [\mathbf{W}\Psi - \mathbf{D}\eta]\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{p}\} = \{\bar{\mathbf{P}}\}$$
(3.42)

3.4 Pontos Internos Constitutivos

Pelo fato de que, na Formulação com Dupla Reciprocidade, as cargas de domínio presentes na equação de Poisson são aproximadas apenas por funções de interpolação entre os nós funcionais do contorno, torna-se necessária, na maioria dos casos, a introdução de novos pontos de interpolação, agora internos ao domínio, que permitam uma representação mais realista de $p(\mathbf{X})$.

Como esses pontos também promovem um aumento na dimensão das matrizes, são denominados pontos internos constitutivos e tem a vantagem adicional de gerarem resultados internos para o potencial, sem exigir uma etapa de pós-processamento.

3.4.1 Pontos Internos na Formulação com Dupla Reciprocidade Singular

Aos N pontos de interpolação do contorno, somam-se M pontos internos, de forma que as Equações (3.4) e (3.5) ganham novos termos, conforme registrado em (3.43) e (3.44).

$$p(\mathbf{X}) \approx \alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (3.43)$$

$$F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = \nabla^2 \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (3.44)$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

onde $j=1, \dots, N$ refere-se aos pontos no contorno e $j=N+1, \dots, N+M$, refere-se aos pontos internos.

Considera-se aqui, como ponto de partida, a Equação (3.3), com a introdução do resultado (2.18) substituindo seu termo da esquerda e com o resultado (3.8), substituindo seu termo da direita, agora também com os pontos internos, *i.e.*,

$$c(\xi)u(\xi) + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi; \mathbf{X})u(\mathbf{X})d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma = \alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + c(\xi)\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (3.45)$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

O passo seguinte, como adotado nos demais desenvolvimentos, consiste em aplicar o método da colocação, utilizando ξ^i ($i=1, \dots, N+M$) pontos, novamente coincidentes com todos os pontos de interpolação, que agora não se limitam somente àqueles situados no contorno. Desta forma, têm-se as Equações (3.46), a seguir.

$$c(\xi^i)u(\xi^i) + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi^i; \mathbf{X})u(\mathbf{X})d\Gamma - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi^i; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma = \alpha^j \left\{ - \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi^i; \mathbf{X})d\Gamma + \oint_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})q^*(\xi^i; \mathbf{X})d\Gamma + c(\xi^i)\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) \right\} \quad (3.46)$$

$$i = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

Por fim, divide-se o contorno em N elementos constantes Γ_e , onde o ponto médio de cada elemento, \mathbf{X}_e , coincide com os nós funcionais ali localizados. Chega-se, desta forma, às expressões (3.47).

$$\begin{aligned}
& c(\xi^i)u(\xi^i) + \sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma = \\
& \alpha^j \left\{ - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + c(\xi^i) \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) \right\} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

As Equações (3.47) podem ser reescritas em forma matricial como a seguir, considerando sempre, contornos suaves.

$$\bar{\mathbf{H}}\{\bar{\mathbf{u}}\} - \bar{\mathbf{G}}\{\bar{\mathbf{q}}\} = [\bar{\mathbf{H}}\bar{\Psi} - \bar{\mathbf{G}}\bar{\eta}]\{\bar{\mathbf{a}}\} = [\bar{\mathbf{H}}\bar{\Psi} - \bar{\mathbf{G}}\bar{\eta}]\bar{\mathbf{F}}^{-1}\{\bar{\mathbf{p}}\} \quad (3.48)$$

$$\bar{H}_{ik} = \begin{cases} \int_{\Gamma_k} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma & \text{para } k \leq N; i \neq k \\ c(\xi^i) + \int_{\Gamma_k} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} & \text{para } k \leq N; i = k \\ c(\xi^i) = 1 & \text{para } k > N; i = k \\ 0 & \text{para } k > N; i \neq k \end{cases}$$

$$\bar{G}_{ik} = \begin{cases} \int_{\Gamma_k} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma & \text{para } k \leq N \\ 0 & \text{para } k > N \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_{kj} = \begin{cases} \eta(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_k) & \text{para } k \leq N \\ 0 & \text{para } k > N \end{cases}$$

$$\bar{\Psi}_{kj} = \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_k)$$

$$\bar{F}_{kj} = \nabla^2 \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_k)$$

$$\bar{p}_k = p(\mathbf{X}_k)$$

$$i, j, k = 1, \dots, N+M$$

3.4.2 Pontos Internos na Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular

Por não estarem situados no contorno, os pontos internos constitutivos, mesmo na Formulação Hipersingular, que envolve derivações do potencial com relação a uma direção normal à fronteira, devem ser tratados por equações da Formulação Singular.

Desta forma, a aproximação da carga de domínio é realizada novamente como em (3.43) e (3.44), *i.e.*, assume-se N pontos no contorno e mais M internos para interpolação. Para os nós funcionais situados

no contorno, adota-se o desenvolvimento abordado no item 3.3 deste capítulo, enquanto que para os pontos internos, o desenvolvimento descrito no item 3.2 é utilizado. Com isso, as equações que formam o sistema linear podem ser divididas em dois grandes grupos, um com N e outro com M equações, representados em (3.49) e (3.50) respectivamente, considerando a discretização do contorno, assumido como suave, em N elementos constantes.

$$\sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \frac{1}{2} q(\xi^i) =$$

$$\alpha^j \left\{ \frac{1}{2} \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \right\} \quad (3.49)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

$$\sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + u(\xi^i) =$$

$$\alpha^j \left\{ \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \right\} \quad (3.50)$$

$$i = N+1, \dots, N+M$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

Matricialmente, este sistema pode ser resumido na forma apresentada em (3.51).

$$\overline{\mathbf{W}}\{\bar{\mathbf{u}}\} - \overline{\mathbf{D}}\{\bar{\mathbf{q}}\} = [\overline{\mathbf{W}}\Psi - \overline{\mathbf{D}}\bar{\eta}]\{\bar{\mathbf{a}}\} = [\overline{\mathbf{W}}\Psi - \overline{\mathbf{D}}\bar{\eta}]\mathbf{F}^{-1}\{\bar{\mathbf{p}}\} \quad (3.51)$$

$$\overline{W}_{ik} = \begin{cases} \int_{\Gamma_k} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma & \text{para } k \leq N; i \leq N \\ \int_{\Gamma_k} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma & \text{para } k \leq N; i > N \\ 1 & \text{para } k > N; i = k \\ 0 & \text{para } k > N; i \neq k \end{cases}$$

$$\bar{D}_{ik} = \begin{cases} \int_{\Gamma_k} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma & \text{para } k \leq N; i \leq N; i \neq k \\ -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_k} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2} & \text{para } k \leq N; i \leq N; i = k \\ \int_{\Gamma_k} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_k) d\Gamma & \text{para } i > N; k \leq N \\ 0 & \text{para } k > N \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_{kj} = \begin{cases} \eta(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_k) & \text{para } k \leq N \\ 0 & \text{para } k > N \end{cases}$$

$$\bar{\Psi}_{kj} = \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_k)$$

$$\bar{F}_{kj} = \nabla^2 \Psi(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_k)$$

$$\bar{p}_k = p(\mathbf{X}_k)$$

$$i, j, k = 1, \dots, N + M$$

CAPITULO IV

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

4.1 Primeiro Exemplo: Barra Homogênea Submetida ao Peso Próprio

Na primeira simulação, considera-se uma barra vertical de massa específica uniforme ρ_o , engastada na extremidade superior e sujeita à ação gravitacional, conforme ilustrado na Figura 4.1.

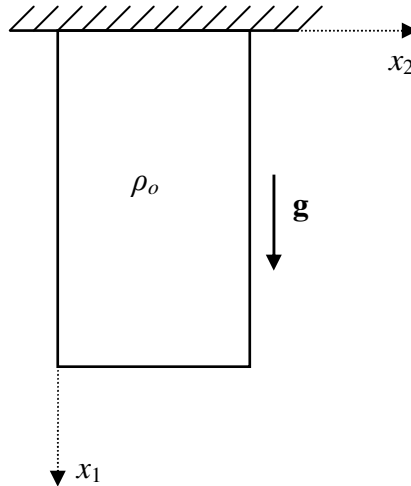


Figura 4.1 - Barra homogênea vertical submetida ao peso próprio

Em sua forma diferencial, este problema pode ser escrito na forma apresentada em (4.3), após a substituição da lei de Hooke (4.2) na equação de equilíbrio (4.1).

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{dx_1} + \rho_o g = 0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{x_1} = E \frac{du}{dx_1} \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = -\frac{\rho_o g}{E} \quad (4.3)$$

onde σ_{x_1} é a tensão na direção x_1 em cada ponto do domínio, g é o valor numérico da aceleração da gravidade, E é o módulo de elasticidade do material e u representa o deslocamento na direção x_1 em cada ponto do domínio.

A Equação (4.3) é uma equação de Poisson com carga externa uniforme e constante em todo o domínio.

Admitindo-se uma barra de comprimento L , as condições de contorno do problema são aquelas apresentadas em (4.4) e (4.5):

$$u(x_1 = 0) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{du(x_1 = L)}{dx_1} = 0 \quad (4.5)$$

As soluções analíticas do problema para deslocamentos e tensões podem, desta forma, ser obtidas por integração direta. Os resultados são apresentados nas Equações (4.6) e (4.7).

$$u(x_1) = \frac{\rho_o g x_1}{E} \left(L - \frac{x_1}{2} \right) \quad (4.6)$$

$$\sigma_{x_1}(x_1) = E \frac{du(x_1)}{dx_1} = \rho_o g (L - x_1) \quad (4.7)$$

Estes resultados analíticos foram utilizados como base para testar a eficácia da Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular, principalmente quando comparada com a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular.

Para as simulações foi definido um domínio quadrado, de lado unitário, com a origem do sistema cartesiano localizada em um dos vértices. As demais constantes, como E , g e ρ_o , também entraram com valor unitário nos programas computacionais. Três malhas, com 16, 32 e 64 elementos de contorno constantes homogêneos, foram geradas, conforme ilustrado nas Figuras 4.2 a 4.4.

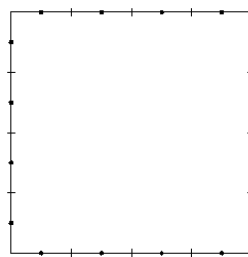


Figura 4.2 - Malha com 16 elementos

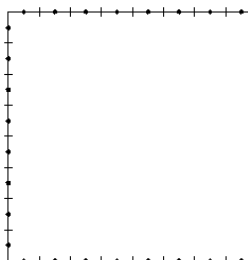


Figura 4.3 - Malha com 32 elementos

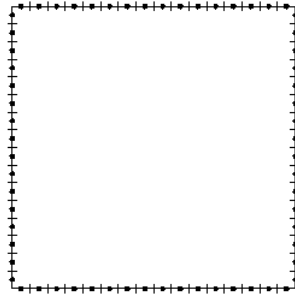


Figura 4.4 - Malha com 64 elementos

Todas as três malhas foram tratadas com 0, 4 e 9 pontos internos constitutivos, sendo que as malhas com 32 e 64 elementos também foram estudadas com 16 pontos internos. A malha mais refinada chegou a ser trabalhada com 28 pontos internos constitutivos, conforme ilustrado nas Figuras 4.5 a 4.8 e registrado nas Tabelas 4.1 a 4.4.

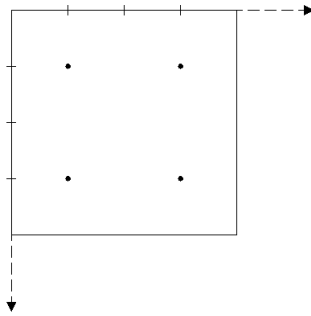


Figura 4.5 - Posicionamento de 4 pontos internos constitutivos

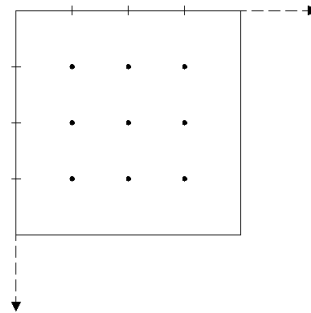


Figura 4.6 - Posicionamento de 9 pontos internos constitutivos

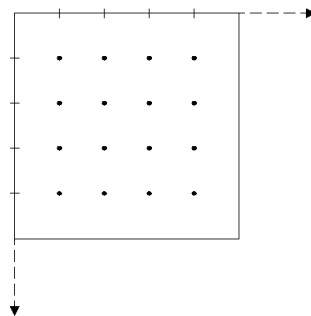


Figura 4.7 - Posicionamento de 16 pontos internos constitutivos

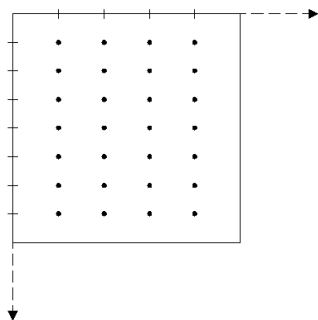


Figura 4.8 - Posicionamento de 28 pontos internos constitutivos

Tabela 4.1 - Configuração com 4 Pontos Internos

Localização dos Pontos Internos Constitutivos		
PI	x_1	x_2
1	0.25	0.25
2	0.25	0.75
3	0.75	0.25
4	0.75	0.75

Tabela 4.2 - Configuração com 9 Pontos Internos

Localização dos Pontos Internos Constitutivos		
PI	x_1	x_2
1	0.25	0.25
2	0.25	0.50
3	0.25	0.75
4	0.50	0.25
5	0.50	0.50
6	0.50	0.75
7	0.75	0.25
8	0.75	0.50
9	0.75	0.75

Tabela 4.3 - Configuração com 16 Pontos Internos

Localização dos Pontos Internos Constitutivos					
PI	x_1	x_2	PI	x_1	x_2
1	0.20	0.20	9	0.60	0.20
2	0.20	0.40	10	0.60	0.40
3	0.20	0.60	11	0.60	0.60
4	0.20	0.80	12	0.60	0.80
5	0.40	0.20	13	0.80	0.20
6	0.40	0.40	14	0.80	0.40
7	0.40	0.60	15	0.80	0.60
8	0.40	0.80	16	0.80	0.80

Tabela 4.4 - Configuração com 28 Pontos Internos

Localização dos Pontos Internos Constitutivos					
PI	x_1	x_2	PI	x_1	x_2
1	0.125	0.200	15	0.500	0.600
2	0.125	0.400	16	0.500	0.800
3	0.125	0.600	17	0.625	0.200
4	0.125	0.800	18	0.625	0.400
5	0.250	0.200	19	0.625	0.600
6	0.250	0.400	20	0.625	0.800
7	0.250	0.600	21	0.750	0.200
8	0.250	0.800	22	0.750	0.400
9	0.375	0.200	23	0.750	0.600
10	0.375	0.400	24	0.750	0.800
11	0.375	0.600	25	0.875	0.200
12	0.375	0.800	26	0.875	0.400
13	0.500	0.200	27	0.875	0.600
14	0.500	0.400	28	0.875	0.800

Neste exemplo, apenas funções interpolantes do tipo radiais cúbicas, *i.e.*, com $\lambda=5$ nas Equações (3.13) a (3.15), foram estudadas.

4.1.1 Análise de malhas

Os programas foram preparados para fornecer os erros percentuais médios, em relação aos resultados analíticos (4.6) e (4.7), nos pontos internos constitutivos, nos nós do contorno e globais, *i.e.*, considerando todos os dois conjuntos de pontos, para deslocamentos e tensões. Nos casos dos erros médios globais e nos nós do contorno, foram excluídos os pontos de deslocamento prescrito nulo em $x_1=0$, que, pela exatidão inerente, reduziriam esse valor médio.

Com o intuito de justificar as malhas utilizadas, as figuras seguintes ilustram o comportamento destes erros médios para as três malhas, sempre com nove pontos internos, considerando as duas Formulações: Dupla Reciprocidade Singular (FDRS) e Dupla Reciprocidade Hipersingular (FDRH).

Observa-se que, em todos os casos, a malha com 16 elementos apresenta resultados passíveis de melhora através do refino, enquanto que o ganho relativo da malha com 32 elementos para a malha com 64 elementos foi muito pequeno, principalmente na FDRS.

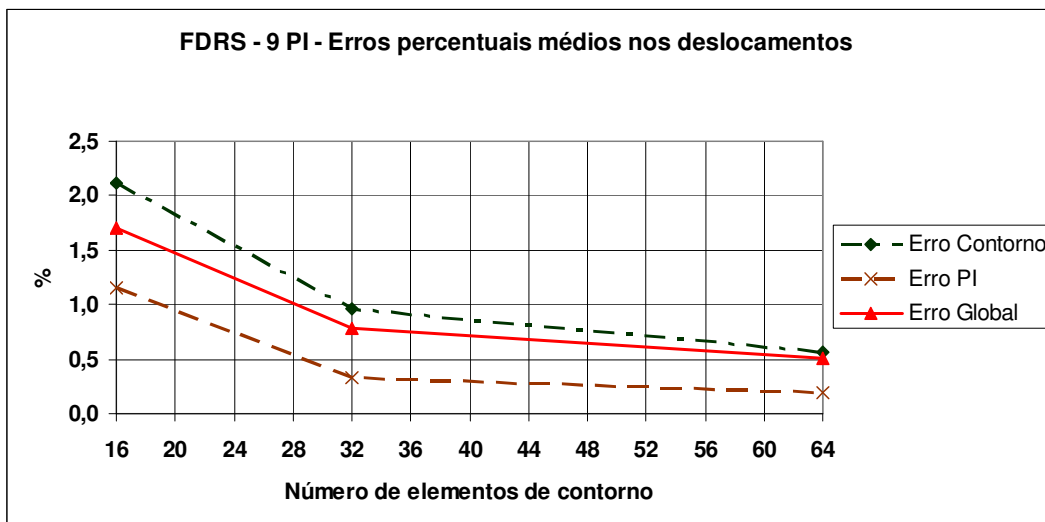


Figura 4.9 - Exemplo 1; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos

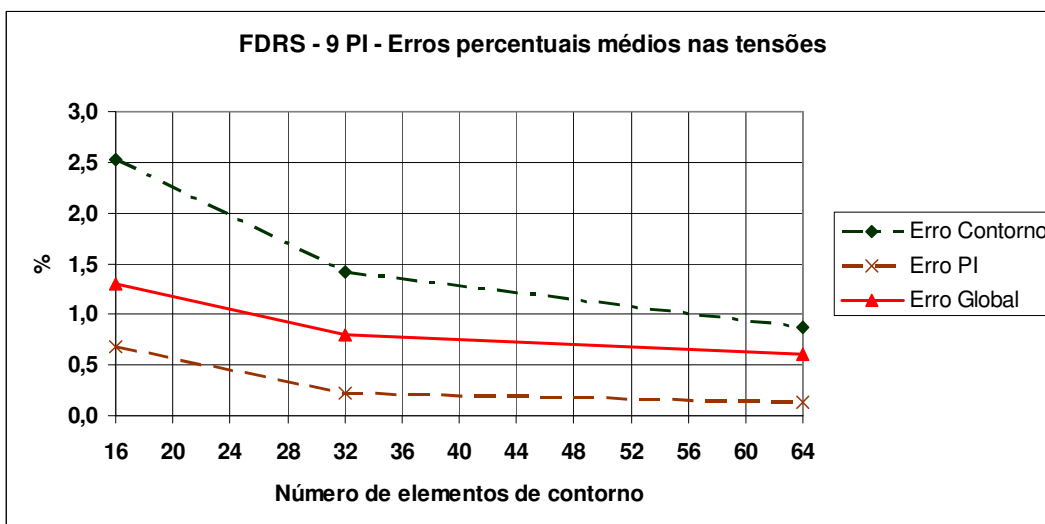


Figura 4.10 - Exemplo 1; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões

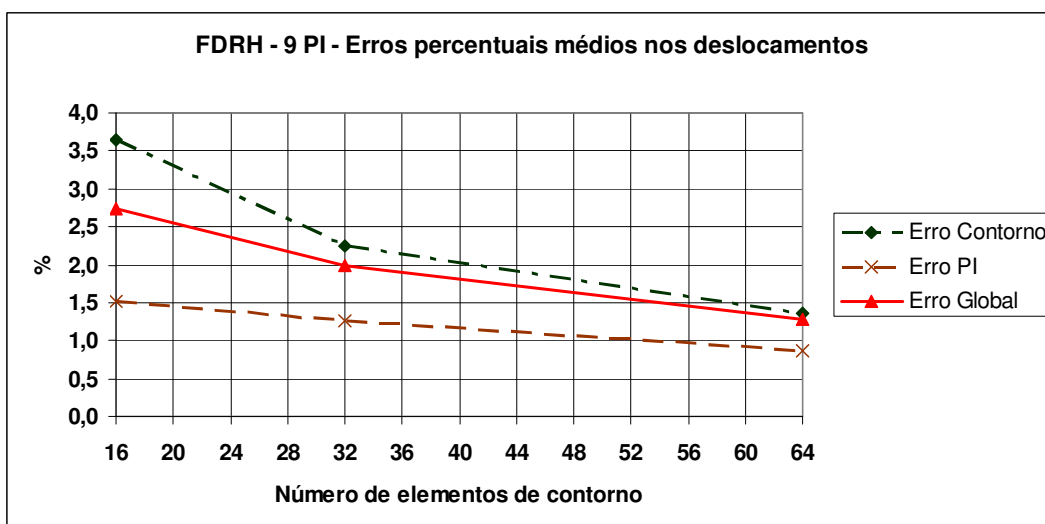


Figura 4.11 - Exemplo 1; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos

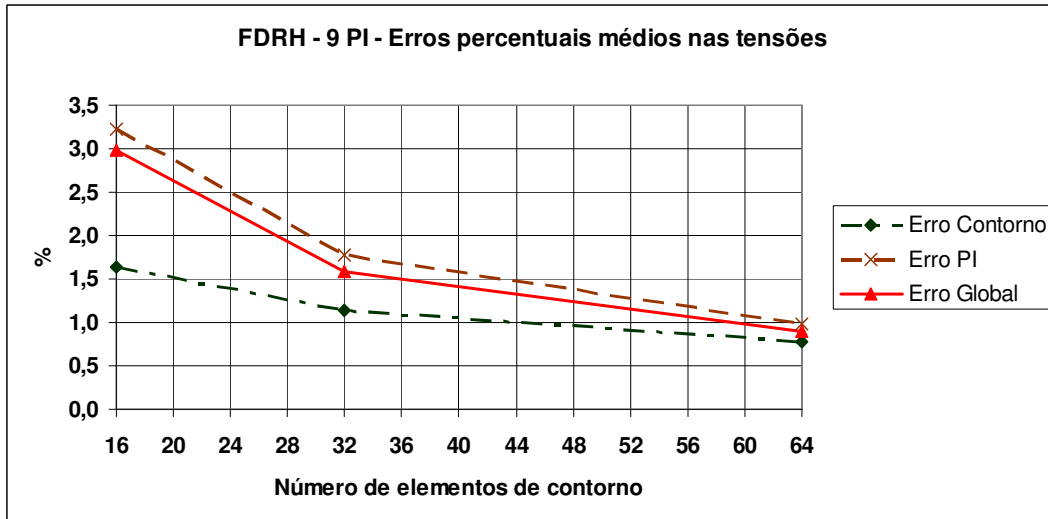


Figura 4.12 - Exemplo 1; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões

4.1.2 Comparação entre as Formulações

Nos gráficos das Figuras 4.13 e 4.14, são inseridos os resultados numéricos sobre uma curva analítica de deslocamentos adimensionalizados ao longo da extensão da barra, para as Formulações com Dupla Reciprocidade Singular e Hipersingular, respectivamente. Considerou-se nesses casos, apenas a configuração com 32 elementos de contorno e 9 pontos internos. Os resultados numéricos, representados por pontos nos gráficos em questão, foram determinados pela média aritmética dos resultados de todos os nós situados numa determinada coordenada x_1 , sejam eles pontos internos constitutivos ou de contorno, indiscriminadamente.

Observa-se uma boa adequação desses resultados numéricos em relação ao que era de se esperar, em ambas as formulações.

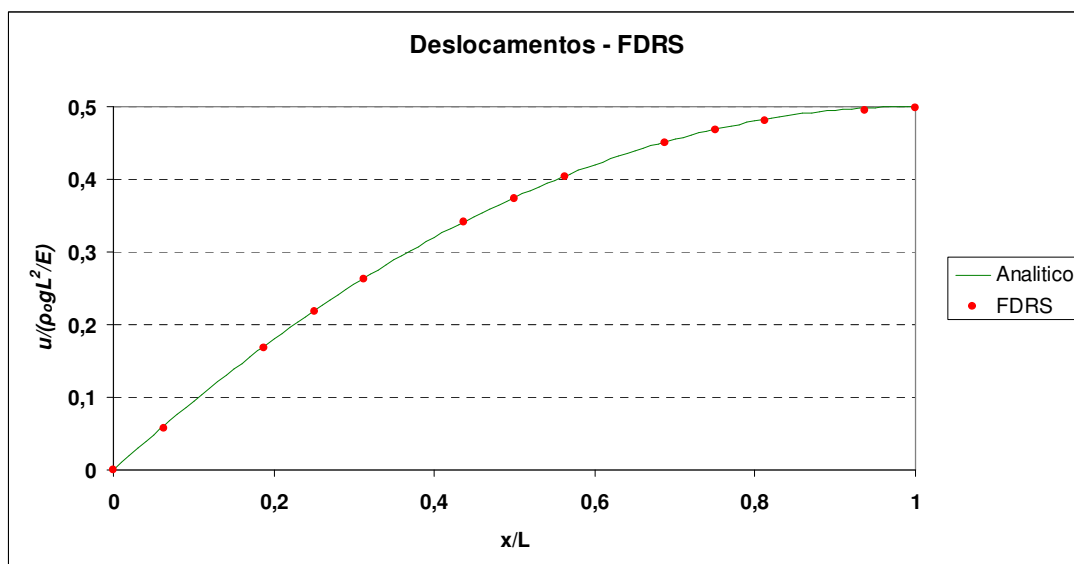


Figura 4.13 - Exemplo 1; comparação dos deslocamentos da FDRS com os resultados analíticos

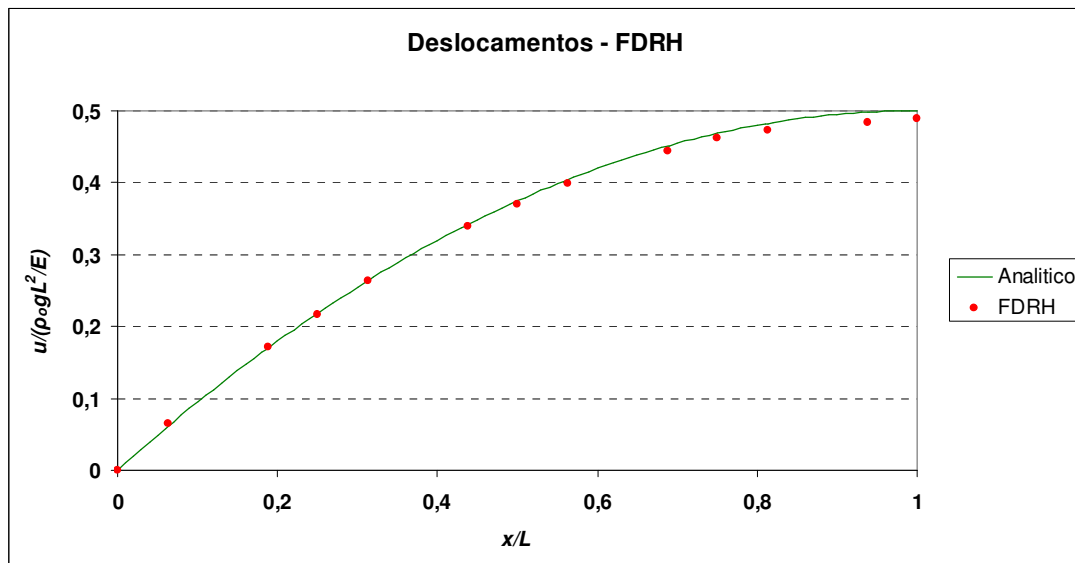


Figura 4.14 - Exemplo 1; comparação dos deslocamentos da FDRH com os resultados analíticos

As Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam respectivamente os erros médios (nos pontos internos, contorno e globais) para deslocamentos e tensões, em todas as configurações de malhas estudadas, considerando as duas formulações.

Tabela 4.5 - Erros percentuais médios para deslocamentos; barra homogênea

Resultados para deslocamentos na barra homogênea unidimensional tracionada pelo peso próprio							
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS			FDRH		
		Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global	Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global
16 elementos	0	3.66	-	3.66	5.05	-	5.05
	4	3.41	2.70	3.23	4.38	2.95	4.03
	9	2.12	1.16	1.71	3.65	1.52	2.74
32 elementos	0	2.08	-	2.08	3.03	-	3.03
	4	1.34	0.79	1.26	2.51	1.70	2.39
	9	0.96	0.33	0.79	2.26	1.26	1.98
	16	1.06	0.43	0.81	2.32	1.36	1.93
64 elementos	0	2.33	-	2.33	2.93	-	2.93
	4	0.75	0.43	0.72	1.53	1.14	1.50
	9	0.56	0.20	0.50	1.36	0.87	1.29
	16	0.47	0.13	0.39	1.30	0.83	1.18
	28	0.50	0.16	0.37	1.36	0.93	1.20

Tabela 4.6 - Erros percentuais médios para tensões; barra homogênea

Resultados para tensões na barra homogênea unidimensional tracionada pelo peso próprio							
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS			FDRH		
		Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global	Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global
16 elementos	0	6.25	-	6.25	6.33	-	6.33
	4	2.65	1.54	2.29	1.77	4.43	3.65
	9	2.53	0.68	1.30	1.65	3.22	2.99
32 elementos	0	2.02	-	2.02	1.74	-	1.74
	4	1.63	0.52	1.30	1.35	2.28	1.85
	9	1.42	0.22	0.80	1.14	1.77	1.58
	16	1.47	0.34	0.73	1.19	2.00	1.81
64 elementos	0	2.17	-	2.17	2.14	-	2.14
	4	0.98	0.27	0.85	0.96	1.23	1.07
	9	0.87	0.14	0.61	0.77	0.98	0.89
	16	0.84	0.08	0.46	0.73	0.94	0.86
	28	0.87	0.09	0.38	0.78	1.07	0.99

As seis figuras seguintes apresentam o comportamento apenas dos erros globais médios, para cada malha, com o aumento do número de pontos internos constitutivos, realizando uma comparação entre as duas formulações.

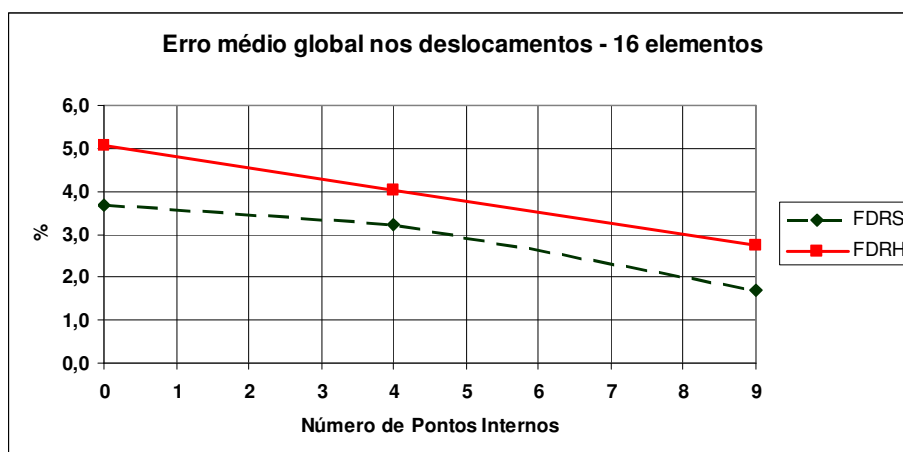


Figura 4.15 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; deslocamentos

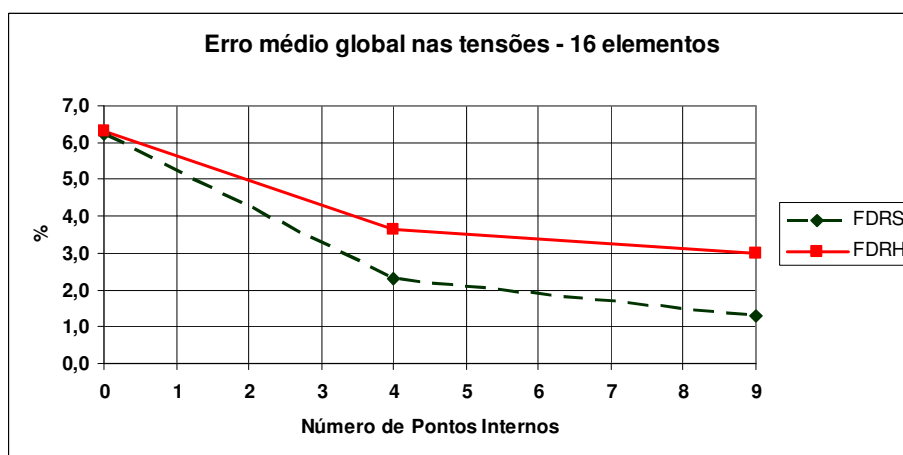


Figura 4.16 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; tensões

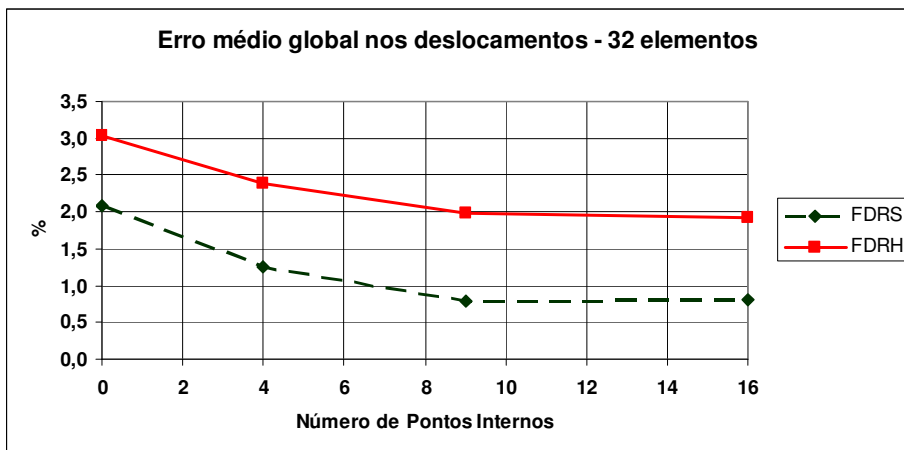


Figura 4.17 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; deslocamentos

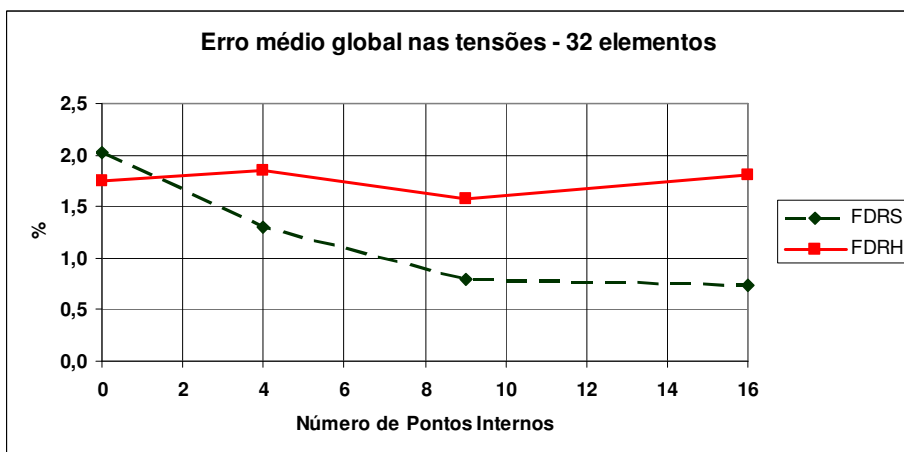


Figura 4.18 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; tensões

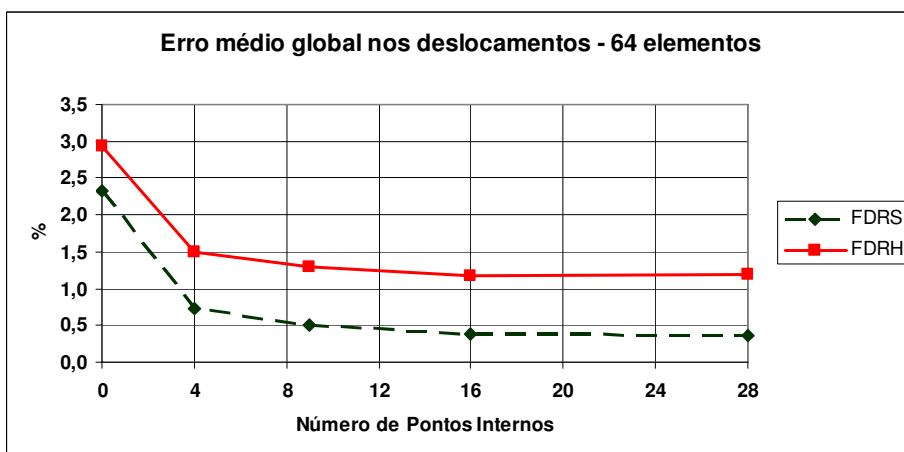


Figura 4.19 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; deslocamentos

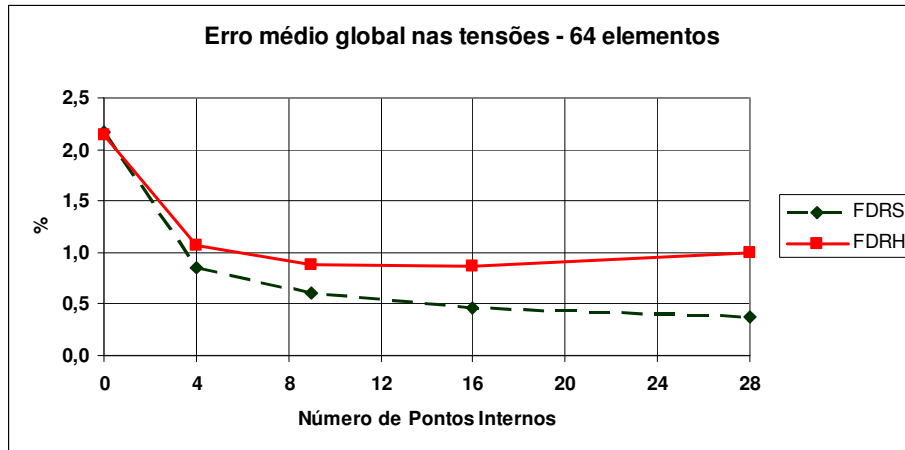


Figura 4.20 - Exemplo 1; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; tensões

4.2 Segundo Exemplo: Barra de Massa Variável Submetida ao Peso Próprio

Com o intuito de analisar o comportamento das formulações quando o potencial apresenta gradientes de ordem maior, foi definido um problema hipotético, similar ao exemplo tratado na seção 4.1, onde a única diferença é que a massa específica da barra varia quadraticamente com a coordenada x_1 , partindo de um valor nulo na origem, *i.e.*, $\rho(x_1) = \rho_o x_1^2$.

A forma diferencial deste problema é dada pela Equação (4.8) com as mesmas condições de contorno apresentadas anteriormente em (4.4) e (4.5). Os resultados analíticos, por sua vez, são apresentados em (4.9) e (4.10).

$$\frac{d^2 u}{dx_1^2} = -\frac{g}{E} \rho_o x_1^2 \quad (4.8)$$

$$u(x_1) = \frac{\rho_o g x_1}{3E} \left(L^3 - \frac{x_1^3}{4} \right) \quad (4.9)$$

$$\sigma_{x_1}(x_1) = E \frac{du(x_1)}{dx_1} = \frac{\rho_o g}{3} (L^3 - x_1^3) \quad (4.10)$$

As mesmas simulações descritas para o exemplo anterior foram realizadas para este problema, novamente entrando com todas as constantes unitárias e utilizando-se funções radiais cúbicas na interpolação da carga de domínio. Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

4.2.1 Análise de malhas

Resultados de desvios médios nos deslocamentos e tensões, para diferentes malhas com nove pontos internos constitutivos, encontram-se registrados nas Figuras 4.21 a 4.24 para ambas as formulações estudadas.

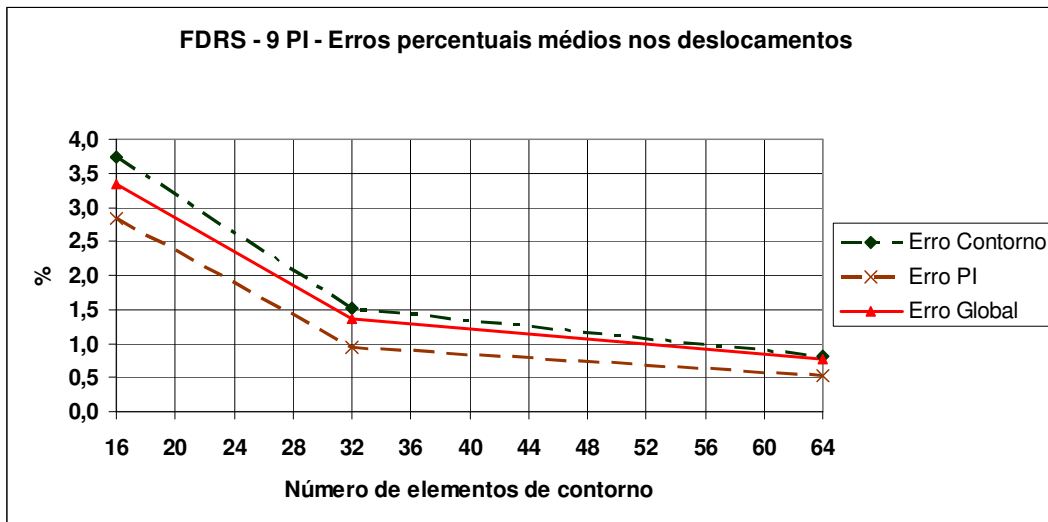


Figura 4.21 - Exemplo 2; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos

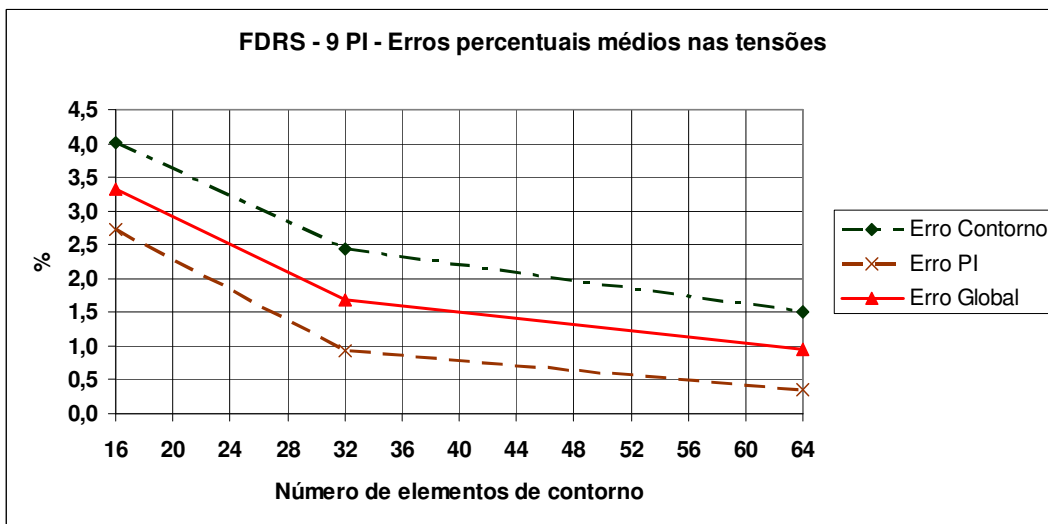


Figura 4.22 - Exemplo 2; FDRS; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões

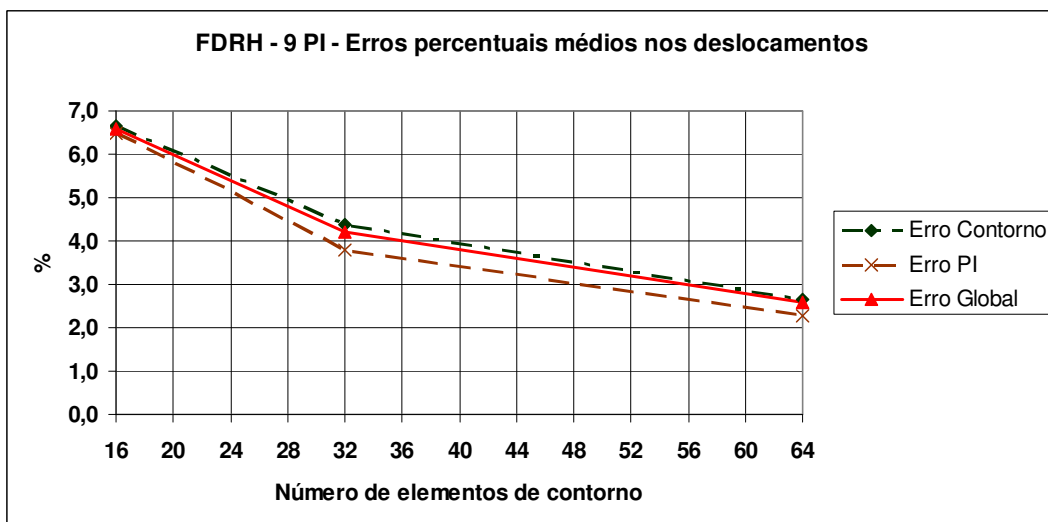


Figura 4.23 - Exemplo 2; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nos deslocamentos

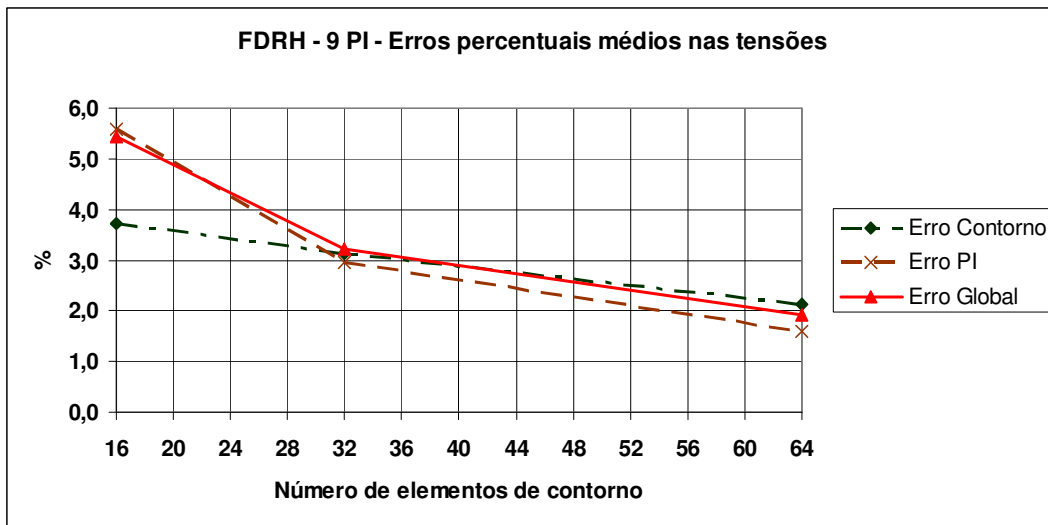


Figura 4.24 - Exemplo 2; FDRH; 9 Pontos Internos Constitutivos; erros nas tensões

4.2.2 Comparação entre as Formulações

As duas próximas figuras ilustram os resultados numéricos, para 32 elementos e 9 pontos internos, sobrepostos sobre a curva analítica adimensionalizada para os deslocamentos, conforme Equação (4.9).

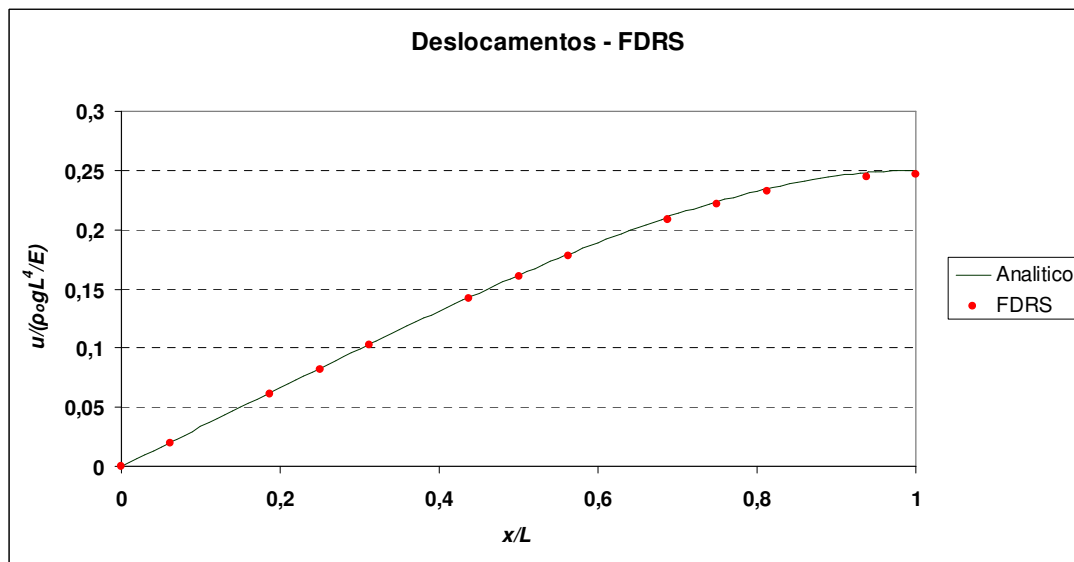


Figura 4.25 - Exemplo 2; comparação dos deslocamentos da FDRS com os resultados analíticos

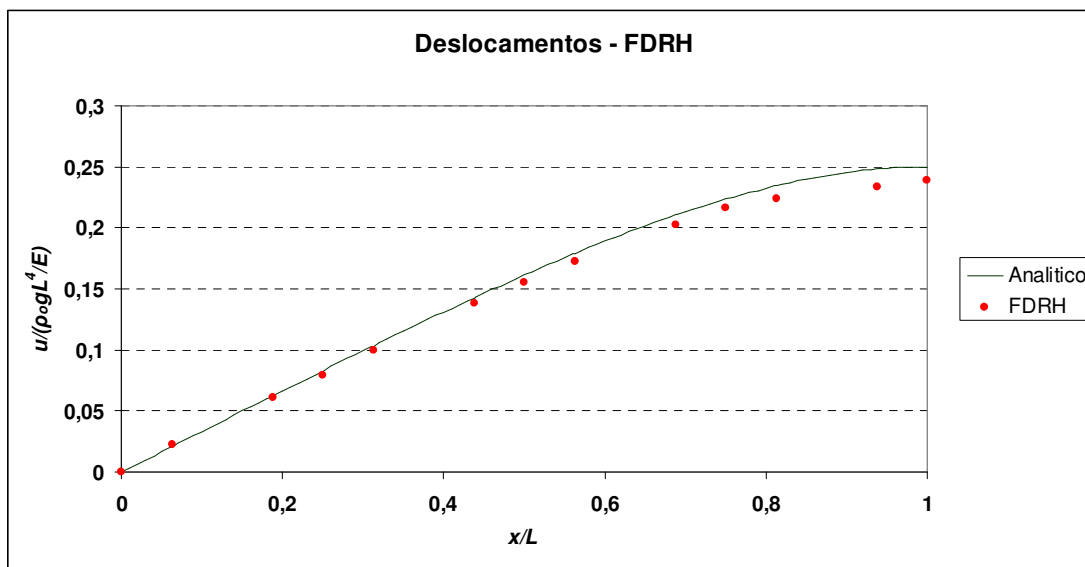


Figura 4.26 - Exemplo 2; comparação dos deslocamentos da FDRH com os resultados analíticos

As Tabelas 4.7 e 4.8 apresentam respectivamente os erros médios (nos pontos internos, contorno e globais) para deslocamentos e tensões, agora para barra com densidade variando parabolicamente, em todas as configurações de malhas estudadas, considerando as duas formulações.

Tabela 4.7 - Erros percentuais médios para deslocamentos; barra de densidade variável

Resultados para deslocamentos na barra parabólica unidimensional tracionada pelo peso próprio							
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS			FDRH		
		Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global	Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global
16 elementos	0	1.11	-	1.11	5.28	-	5.28
	4	4.18	3.45	3.99	6.89	7.13	6.95
	9	3.74	2.83	3.35	6.64	6.47	6.57
32 elementos	0	1.16	-	1.16	4.12	-	4.12
	4	1.68	1.18	1.61	4.49	4.11	4.43
	9	1.51	0.95	1.36	4.37	3.78	4.21
	16	1.51	0.97	1.29	4.36	3.87	4.16
64 elementos	0	0.39	-	0.39	2.34	-	2.34
	4	1.10	0.81	1.08	2.91	2.67	2.90
	9	0.81	0.52	0.76	2.67	2.27	2.60
	16	0.75	0.42	0.67	2.60	2.23	2.51
	28	0.80	0.50	0.69	2.68	2.46	2.60

Tabela 4.8 - Erros percentuais médios para tensões; barra de densidade variável

Resultados para tensões na barra parabólica unidimensional tracionada pelo peso próprio							
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS			FDRH		
		Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global	Erro % contorno	Erro % Pontos Int.	Erro % Global
16 elementos	0	4.31	-	4.31	4.32	-	4.32
	4	4.04	3.33	4.10	3.75	6.35	5.84
	9	4.00	2.73	3.33	3.73	5.60	5.45
32 elementos	0	2.03	-	2.03	2.71	-	2.71
	4	2.52	1.15	2.16	3.21	3.32	3.53
	9	2.44	0.92	1.69	3.13	2.95	3.21
	16	2.46	0.96	1.50	3.17	3.06	3.22
64 elementos	0	1.21	-	1.21	1.52	-	1.52
	4	1.73	0.59	1.53	2.46	1.89	2.44
	9	1.63	0.37	1.19	2.20	1.59	2.04
	16	1.52	0.35	0.94	2.14	1.61	1.92
	28	1.57	0.42	0.85	2.23	1.72	1.94

Os comportamentos dos erros globais médios, para cada malha, com o aumento do número de pontos internos constitutivos, para barra com massa específica variando parabolicamente, são apresentados nas Figuras a seguir.

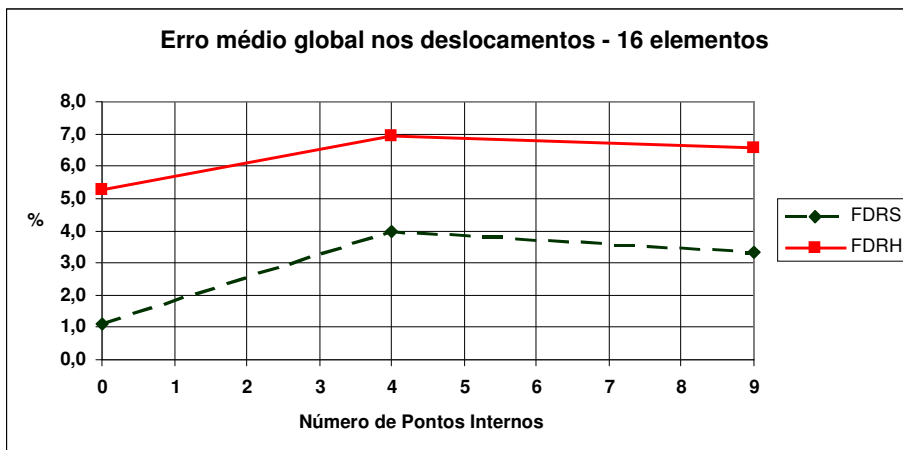


Figura 4.27 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; deslocamentos

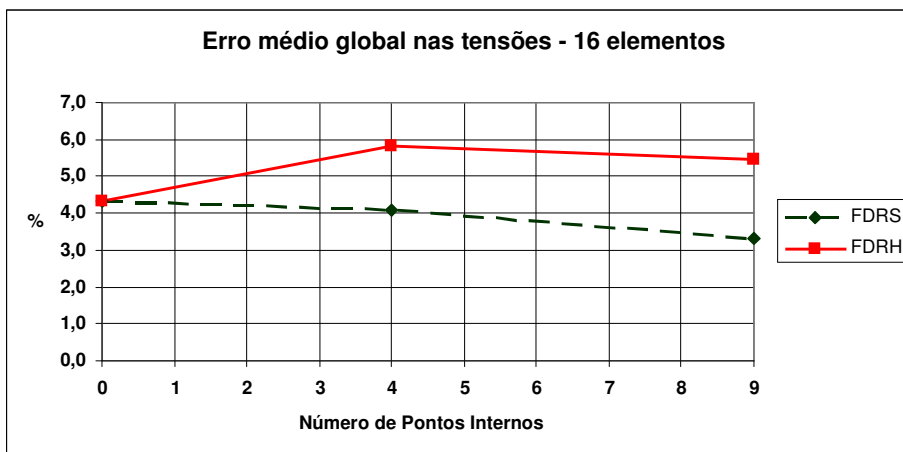


Figura 4.28 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 16 elementos; tensões

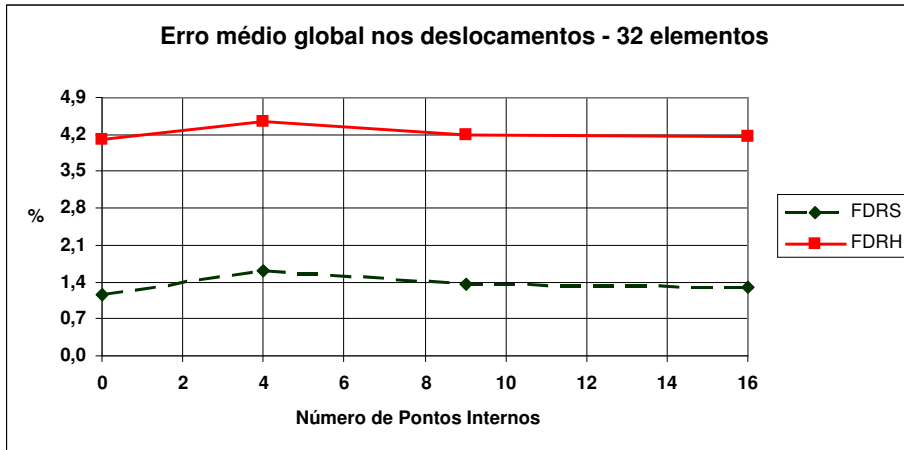


Figura 4.29 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; deslocamentos

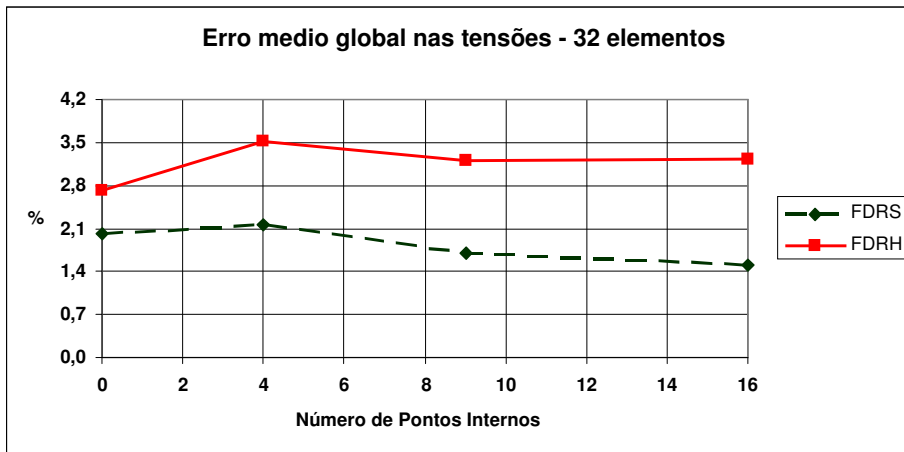


Figura 4.30 - Exemplo2; comparação FDRS e FDRH; 32 elementos; tensões

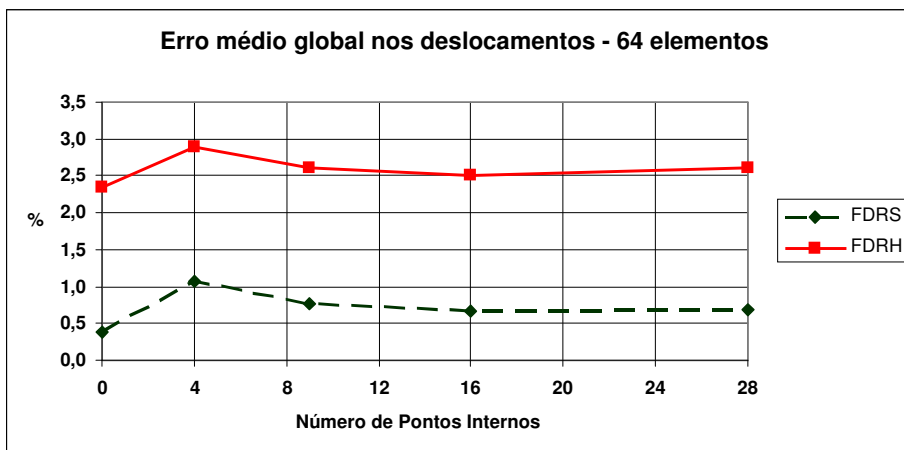


Figura 4.31 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; deslocamentos

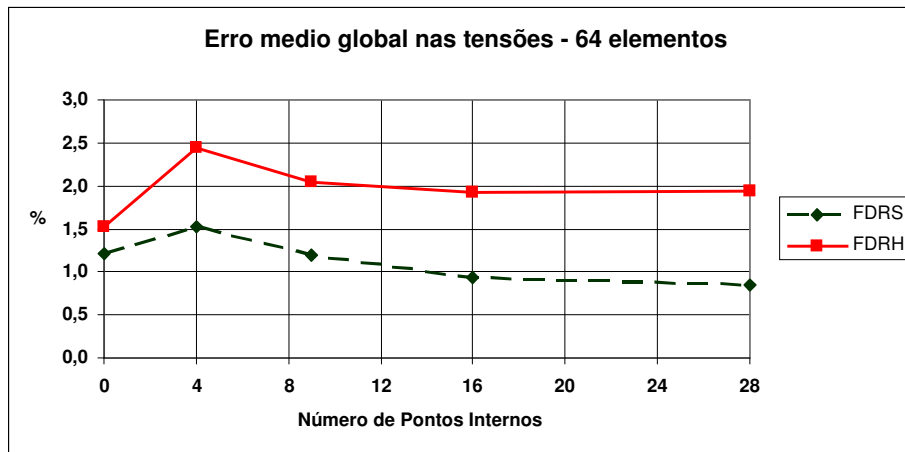


Figura 4.32 - Exemplo 2; comparação FDRS e FDRH; 64 elementos; tensões

De maneira geral, a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular gerou resultados melhores do que a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular nos dois exemplos anteriores, salvo os resultados no contorno, tomados separadamente, para tensões na barra homogênea, que envolve gradientes menores para a função potencial, como se pode constatar na Tabela 4.6.

Ambas as formulações tiveram seus desempenhos reduzidos quando a barra com densidade variável parabolicamente foi analisada.

4.3 Terceiro Exemplo: Torção em Barras de Seção Transversal Retangular

A representação física deste terceiro exemplo é apresentada na Figura 4.33, que se refere a uma barra prismática de seção transversal retangular, engastada em uma extremidade e sujeita a um torque, M_t , na outra, de magnitude definida, em relação ao eixo longitudinal que atravessa as seções transversais em seus pontos centrais.

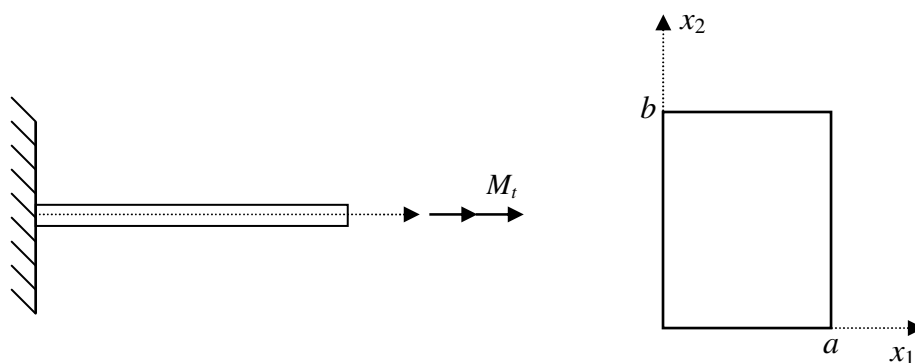


Figura 4.33 - Barra prismática de seção retangular sujeita a torção

A aplicação desse torque provoca um deslocamento angular, também em torno do eixo longitudinal, em cada seção transversal ao longo da barra, que varia linearmente desde um valor nulo, na extremidade fixa, até um valor máximo na extremidade de aplicação do esforço.

Escolhendo-se uma determinada seção transversal ao longo da barra, onde θ representa o deslocamento angular por unidade de comprimento e G é o módulo de elasticidade transversal do material constituinte da barra, pode-se determinar a distribuição de tensões cisalhantes nesta seção a

partir de uma analogia com o problema de uma membrana elástica homogênea [10], uniformemente carregada com uma pressão, p_o . A forma geométrica da membrana deve ser a mesma da seção transversal da barra e seu contorno deve estar sujeito a uma distribuição uniforme de força de tração por unidade de comprimento da fronteira, T , conforme ilustrado na Figura 4.34.

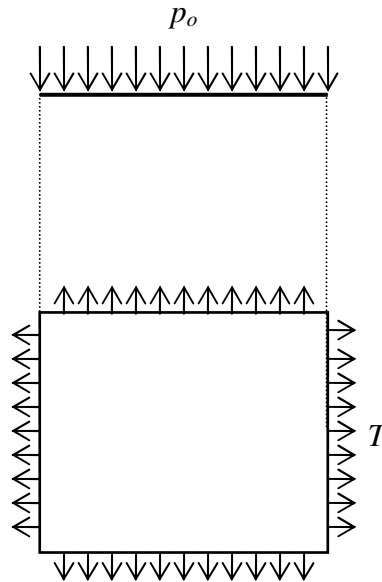


Figura 4.34 - Membrana retangular sujeita à tração no contorno e pressão constantes

A equação que fornece as flechas, w , desta membrana é a equação de Poisson apresentada em (4.11).

$$\nabla^2 w(x_1, x_2) = -\frac{p_o}{T} \quad (4.11)$$

Se a relação (4.12) seguinte for satisfeita, as tensões cisalhantes para a seção da barra sob torção podem ser determinadas pelas inclinações da função $w(x_1, x_2)$, em cada ponto do domínio, conforme destacado em (4.13) e (4.14).

$$\frac{p_o}{T} = 2G\theta \quad (4.12)$$

$$\tau_{x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (4.13)$$

$$\tau_{x_2} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (4.14)$$

onde τ_{x_1} é a tensão cisalhante na direção x_1 e τ_{x_2} é a tensão cisalhante na direção x_2 .

A solução da Equação (4.11), detalhada no Apêndice C, pode ser obtida reescrevendo-se a carga de domínio numa série de Fourier. O resultado final, aplicando a relação (4.12), é apresentado em (4.15), considerando-se o domínio retangular destacado na Figura 4.33 anteriormente.

$$w(x_1, x_2) = \frac{32G\theta}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (4.15)$$

Com isso, as tensões cisalhantes analíticas são dadas pelas Equações (4.16) e (4.17).

$$\tau_{x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{32G\theta}{b\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)}{m \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (4.16)$$

$$\tau_{x_2} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} = -\frac{32G\theta}{a\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)}{n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (4.17)$$

Nas simulações numéricas, utilizou-se uma seção transversal quadrada de lado unitário, *i.e.*, $a=b=1$, de forma que as mesmas configurações de malhas apresentadas anteriormente, no estudo da barra tracionada pelo peso próprio, pudessem ser mantidas.

Neste caso, em particular, apenas os valores das derivadas do potencial tem interesse prático. Para determinar os desvios percentuais das duas formulações em relação aos resultados analíticos, 10^3 termos em cada somatório das Equações (4.16) e (4.17) foram considerados, totalizando 10^6 termos em cada caso. Tais valores foram determinados a partir de testes de convergência que garantem a precisão dos desvios apresentados à frente.

As demais constantes: G e θ , também foram consideradas unitárias nas simulações. As condições de contorno utilizadas foram de potencial nulo em todos os elementos.

Funções interpolantes do tipo radiais simples e cúbicas, *i.e.*, com $\lambda=3$ e $\lambda=5$ nas Equações (3.13) a (3.15), foram testadas.

Observa-se em todos os casos numéricos a ocorrência de erros consideráveis nos vértices do domínio, de forma que os resultados de desvios no contorno foram determinados, separadamente, com e sem os valores dos oito elementos adjacentes às quatro quinas. A ocorrência desses erros destacadamente maiores, se deve ao fato da mudança brusca de direção que o vetor normal externo ao contorno sofre nesta região.

4.3.1 Análise de malhas

Os comportamentos dos resultados de desvios médios em relação ao cálculo analítico, com o refino da malha de contorno, para as tensões cisalhantes, fixando-se o número de pontos internos constitutivos em nove, para as Formulações com Dupla Reciprocidade Singular e Hipersingular e funções interpolantes da carga de domínio radiais simples e cúbicas, são apresentados nas Figuras 4.35 a 4.37.

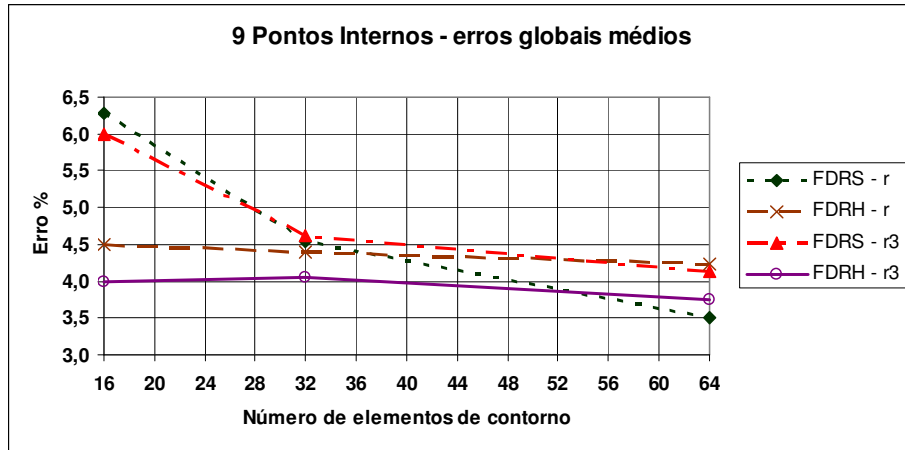


Figura 4.35 - Exemplo 3; Erros globais médios; 9 Pontos Internos

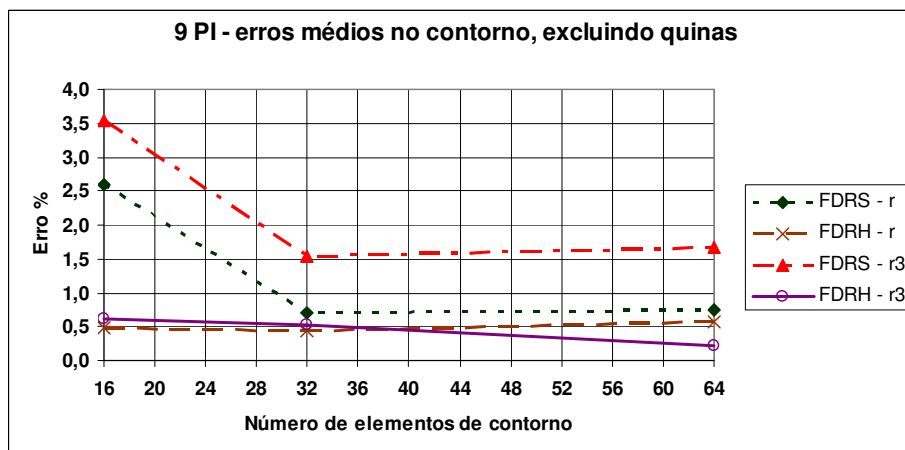


Figura 4.36 - Exemplo 3; Erros médios no contorno, excluindo vértices; 9 Pontos Internos

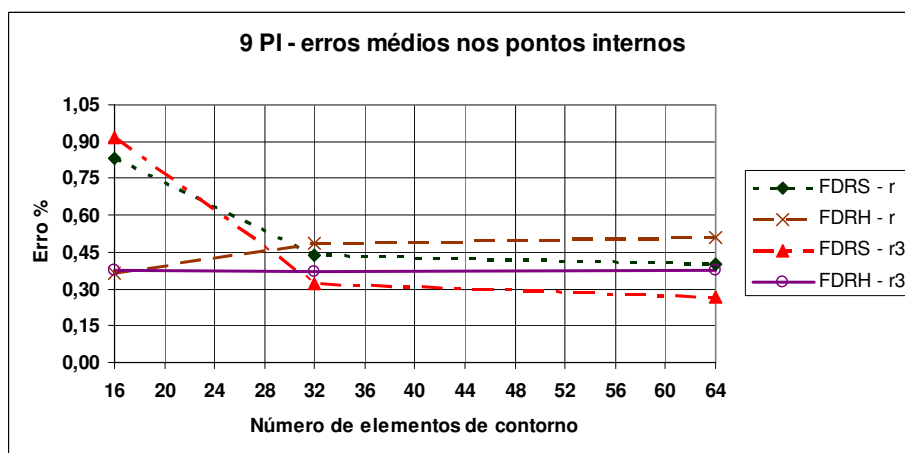


Figura 4.37 - Exemplo 3; Erros médios nos pontos internos constitutivos; 9 Pontos Internos

A utilização de nove pontos internos constitutivos para comparação das malhas, se deve ao fato de que as simulações para apenas quatro pontos internos, mantêm erros elevados (acima de 1%) tanto internamente como no contorno (exceto para a FDRH com funções interpolantes radiais cúbicas), mesmo com a malha mais refinada.

O fraco resultado no contorno (~1,5%) para a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular utilizando-se funções radiais cúbicas para interpolar a carga de domínio, observado na Figura 4.36, se mantém com a utilização de 16 pontos internos.

Para uma quantidade adequada de pontos internos constitutivos, a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular apresenta convergência mais rápida, tanto para funções interpolantes radiais simples, como cúbicas.

Cabe destacar que os resultados tomados são para valores da derivada normal no contorno, posto que o potencial nesse caso é prescrito nulo em toda a fronteira. Esse comportamento sugere um melhor desempenho da FDRH no cálculo das derivadas normais.

De forma geral, os resultados para 32 e 64 elementos de contorno se equivalem.

4.3.2 Comparação entre as Formulações

Os desvios médios entre as tensões cisalhantes calculadas numérica e analiticamente para cada simulação realizada são apresentados nas Tabelas 4.9, para funções interpolantes do tipo radial simples, e 4.10, para funções interpolantes radiais cúbicas. Além dos valores já citados anteriormente, foram incluídos valores médios dos erros considerando os oito elementos que formam as quinas do contorno.

Tabela 4.9 - Erros percentuais médios para torção; funções radiais simples

Torção (Resultados para tensões cisalhantes) - Interpolação da carga de domínio por funções radiais simples											
Número de elementos	Número de Pontos Internos	FDRS - erros percentuais médios					FDRH - erros percentuais médios				
		Pontos Internos	Cont.	Cont., excl. vértices	Vértices	Global	Pontos Internos	Cont.	Cont., excl. vértices	Vértices	Global
16	0	-	13.86	4.96	22.76	13.86	-	13.67	7.88	19.46	13.67
	4	3.45	10.04	1.34	18.74	7.85	2.42	8.50	1.70	15.30	6.47
	9	0.83	10.38	2.59	18.16	6.29	0.37	7.59	0.48	14.69	4.49
32	0	-	10.10	5.11	25.06	10.10	-	10.84	6.12	24.99	10.84
	4	2.67	6.52	1.17	22.56	5.75	2.76	6.67	1.39	22.50	5.89
	9	0.44	6.07	0.71	22.17	4.53	0.49	5.86	0.44	22.12	4.39
	16	0.16	6.18	0.94	21.93	3.17	0.27	5.57	0.13	21.87	2.92
64	0	-	8.05	4.98	29.57	8.05	-	9.47	5.52	37.14	9.47
	4	2.52	4.74	1.45	27.84	4.50	2.71	5.70	1.43	35.64	5.37
	9	0.40	4.10	0.74	27.56	3.51	0.51	4.93	0.58	35.42	4.23
	16	0.12	3.93	0.58	27.39	2.66	0.32	4.66	0.29	35.26	3.21

Tabela 4.10 - Erros percentuais médios para torção; funções radiais cúbicas

Torção (Resultados para tensões cisalhantes) - Interpolação da carga de domínio por funções radiais cúbicas											
Número de elementos	Número de Pontos Internos	FDRS - erros percentuais médios					FDRH - erros percentuais médios				
		Pontos Internos	Cont.	Cont., excl. vértices	Vértices	Global	Pontos Internos	Cont.	Cont., excl. vértices	Vértices	Global
16	0	-	10.23	9.18	11.28	10.23	-	7.11	6.25	7.97	7.11
	4	5.77	9.15	1.78	16.51	8.02	4.79	7.17	1.08	13.27	6.38
	9	0.92	9.81	3.54	16.08	6.00	0.38	6.69	0.61	12.77	3.99
32	0	-	6.02	1.09	20.82	6.02	-	5.68	0.67	20.72	5.68
	4	1.59	5.95	1.13	20.40	5.07	1.68	5.16	0.11	20.29	4.46
	9	0.32	6.23	1.54	20.30	4.62	0.37	5.45	0.52	20.22	4.06
	16	0.08	6.20	1.45	20.45	3.14	0.20	5.41	0.43	20.35	2.80
64	0	-	5.10	1.93	27.28	5.10	-	5.68	1.62	34.08	5.68
	4	0.89	4.51	1.39	26.28	4.10	1.08	4.37	0.19	33.62	4.00
	9	0.27	4.87	1.67	27.23	4.14	0.38	4.37	0.21	33.51	3.74
	16	0.30	4.37	1.45	24.86	3.02	0.39	4.46	0.29	33.61	3.10

As Figuras seguintes ilustram graficamente o comportamento dos desvios médios apresentados nas tabelas anteriores, para as diferentes formulações e funções interpolantes da carga de domínio, com o incremento do número de pontos internos constitutivos à malha de 64 elementos de contorno.

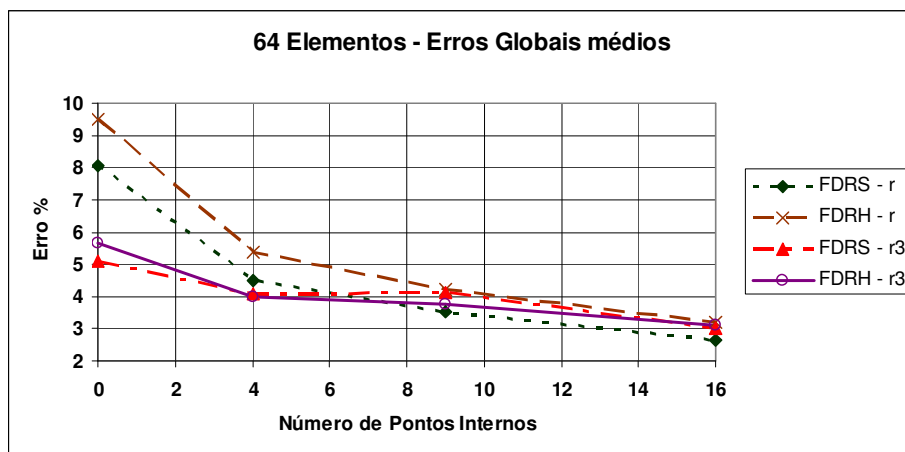


Figura 4.38 - Torção; 64 elementos; erros globais médios

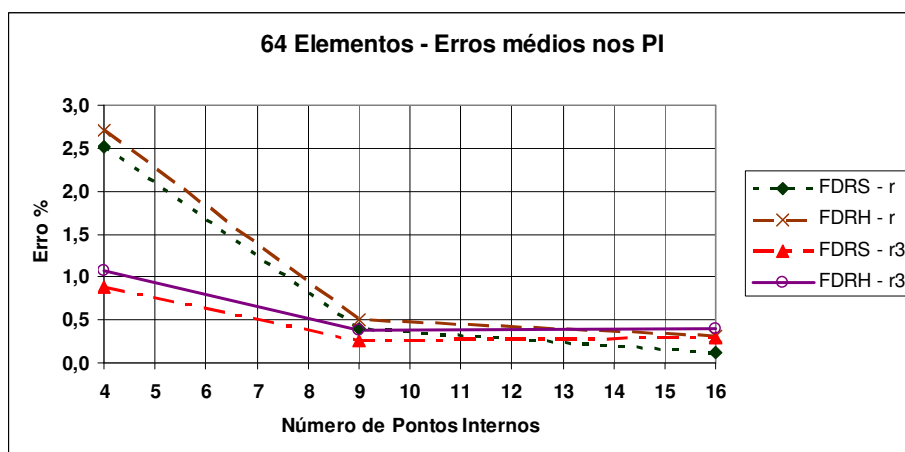


Figura 4.39 - Torção; 64 elementos; erros médios nos pontos internos

Nota-se que os resultados internos para quantidades diminutas de pontos internos constitutivos (4 PI) são menos fracos quando funções de interpolação radiais cúbicas são utilizadas para interpolar a carga de domínio.

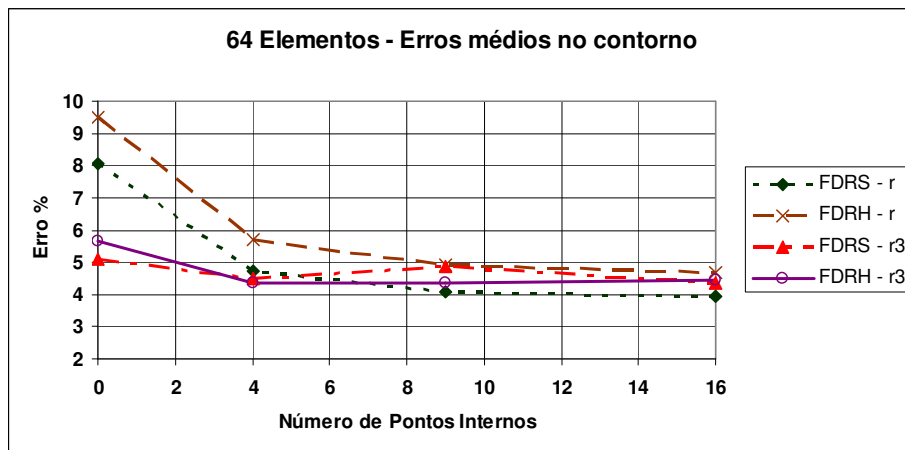


Figura 4.40 - Torção; 64 elementos; erros médios no contorno

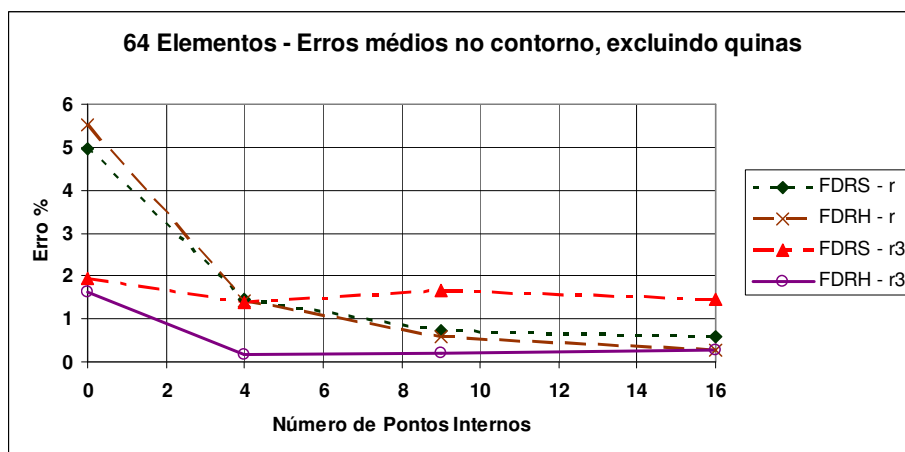


Figura 4.41 - Torção; 64 elementos; erros médios no contorno excluindo vértices

Na ausência de pontos internos constitutivos, os resultados no contorno também são melhores na utilização de funções radiais cúbicas. Entretanto, nesses casos, os resultados não podem ser considerados satisfatórios.

À medida que pontos internos constitutivos vão sendo inseridos, os resultados no contorno, para a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular se mostram superiores aos da Singular. Cabe destacar aqui os excelentes resultados gerados a Formulação Hipersingular com funções radiais cúbicas, mesmo quando uma quantidade de apenas quatro pontos internos é utilizada, conforme apresentado na Figura 4.41.

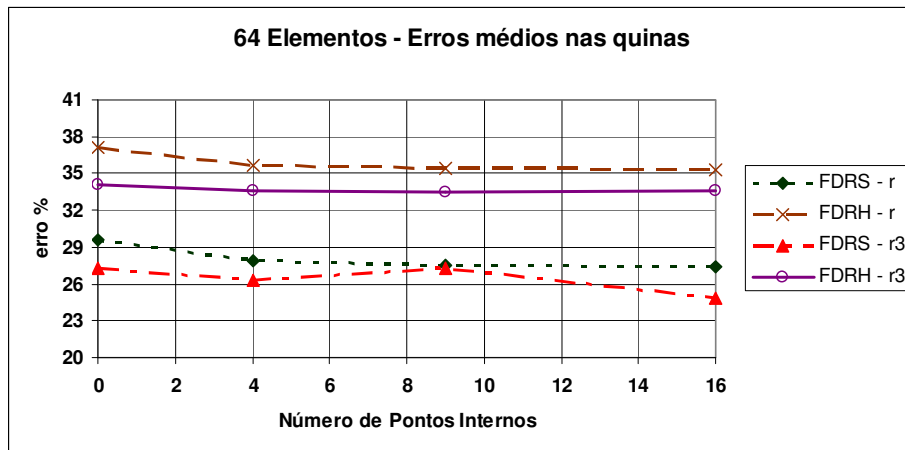


Figura 4.42 - Torção; 64 elementos; erros médios nos elementos adjacentes aos vértices

Para analisar os erros médios das tensões cisalhantes calculadas nos elementos adjacentes aos vértices do domínio, é interessante levar em consideração o gráfico da Figura 4.43, referente à malha de 32 elementos de contorno, em comparação com a figura anterior.

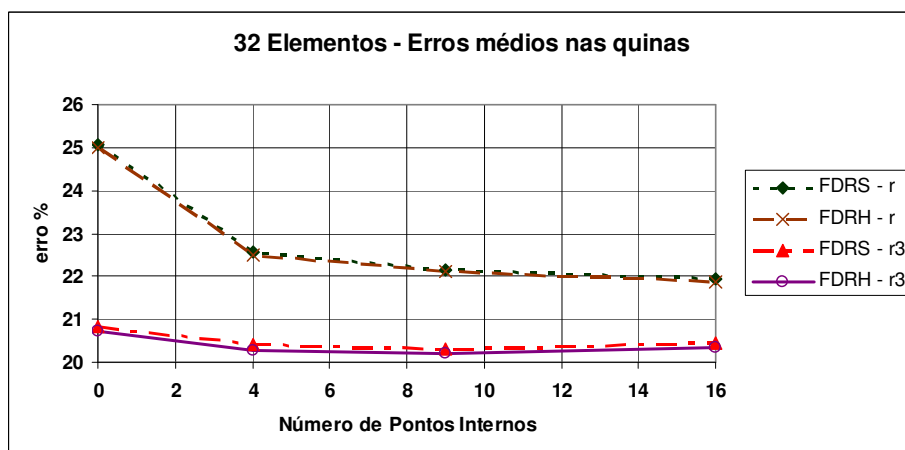


Figura 4.43 - Torção; 32 elementos; erros médios nos elementos adjacentes aos vértices

Os erros nos elementos adjacentes aos vértices são maiores para funções interpolantes do tipo radiais simples quando comparados aos erros para funções radiais cúbicas.

Um refino excessivo da malha agrava estes desvios de quina, principalmente quando a Formulação Hipersingular é adotada. Ou seja, para malhas muito refinadas, o tipo de formulação passa a ser determinante para os erros nesses elementos, ao invés do tipo da função interpolante, como observado na Figura 4.43.

As Figuras 4.44 e 4.45 ilustram o comportamento do erro numérico nos elementos de contorno referentes à aresta $x_1=0$, para malhas com 32 e 64 elementos respectivamente, ambas com 16 pontos constitutivos internos.

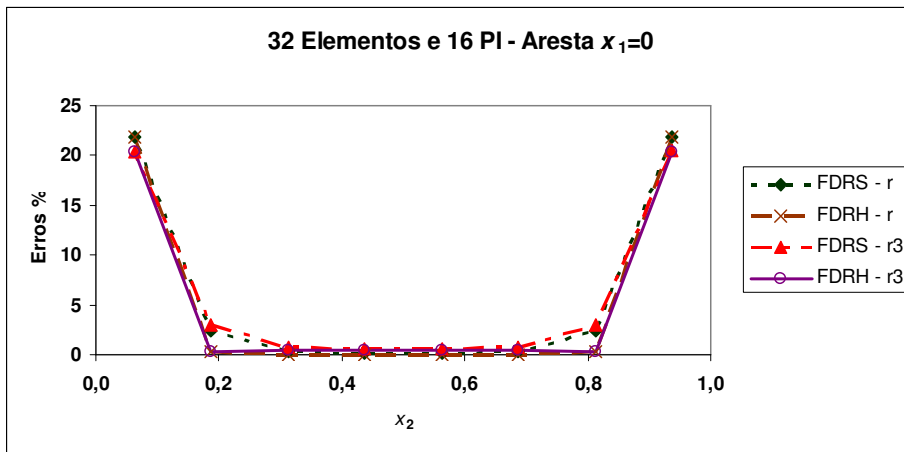


Figura 4.44 - Perfil de desvios na aresta $x_1=0$ para 32 elementos e 16 PI

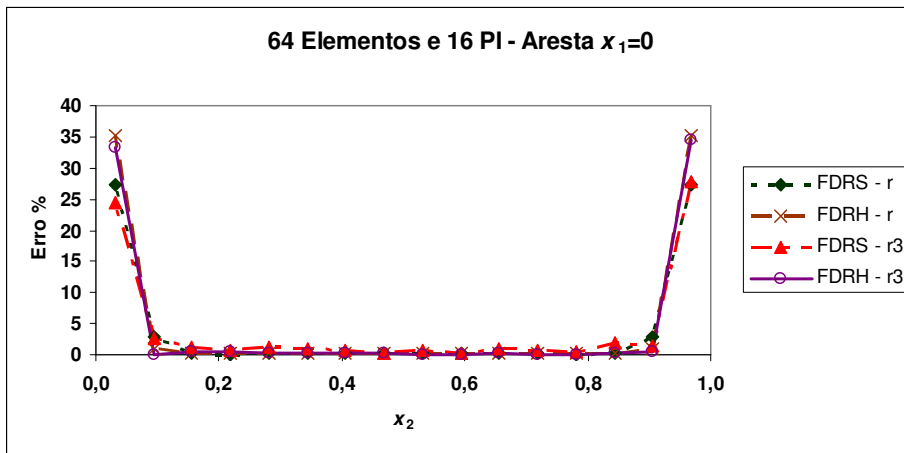


Figura 4.45 - Perfil de desvios na aresta $x_1=0$ para 64 elementos e 16 PI

As Figuras 4.46 e 4.47, por sua vez, apresentam este mesmo perfil considerando apenas os três primeiros elementos após o vértice (0,0).

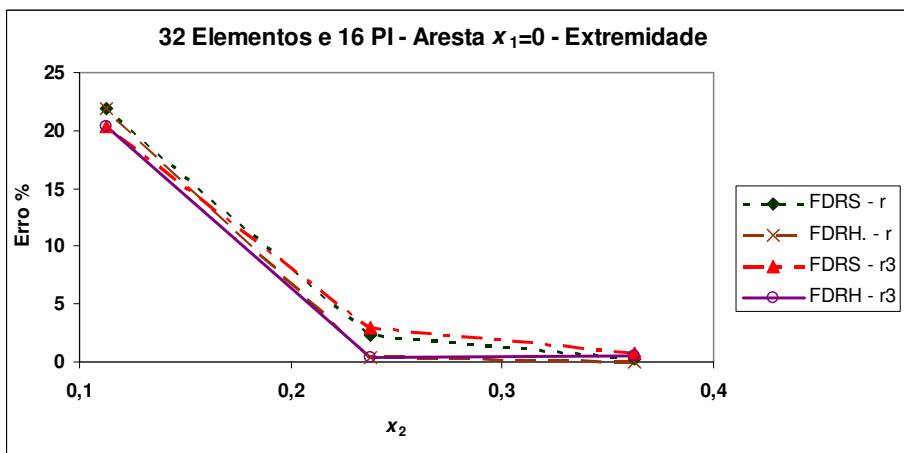


Figura 4.46 - Perfil de desvios na extremidade da aresta $x_1=0$ para 32 elementos e 16 PI

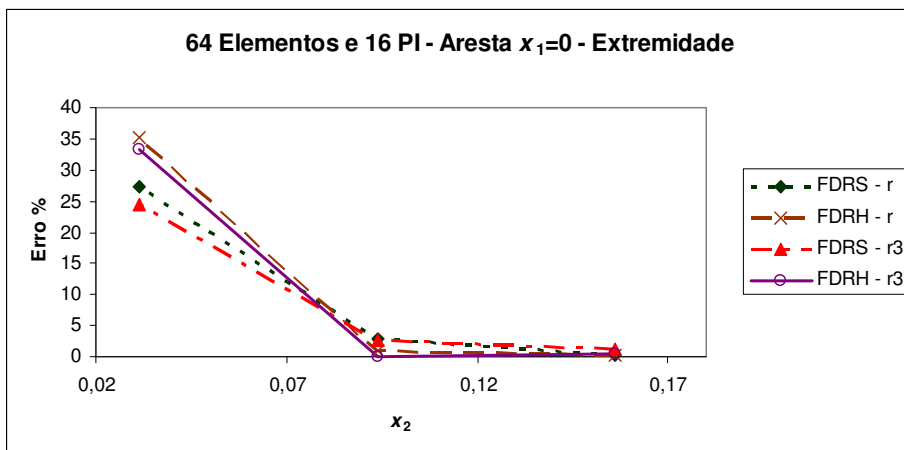


Figura 4.47 - Perfil de desvios na extremidade da aresta $x_1=0$ para 64 elementos e 16 PI

Por fim, as Figuras 4.48 e 4.49 mostram este mesmo perfil excluindo os elementos imediatamente adjacentes aos vértices.

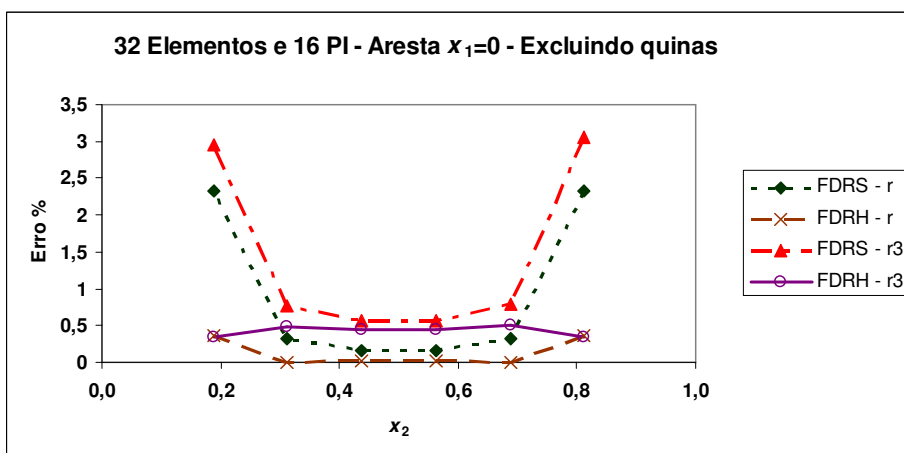


Figura 4.48 - Perfil de desvios no interior da aresta $x_1=0$ para 32 elementos e 16 PI

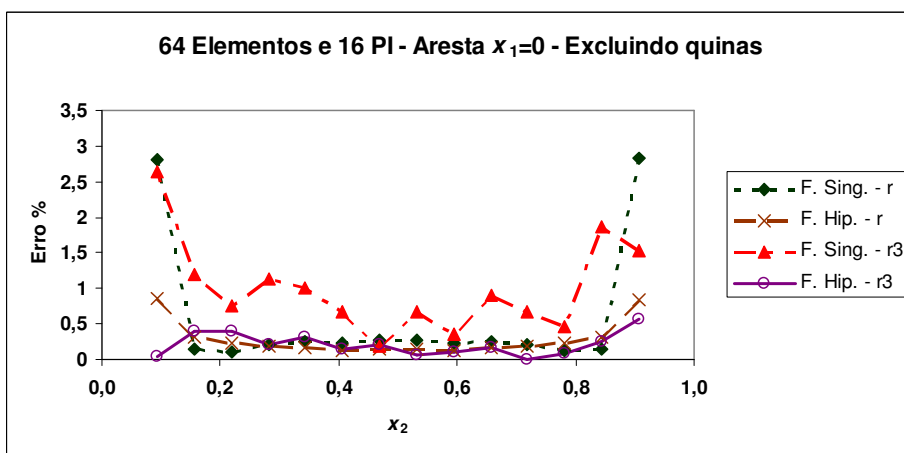


Figura 4.49 - Perfil de desvios no interior da aresta $x_1=0$ para 64 elementos e 16 PI

É notório o fato de que o efeito de quina, apesar de mais acentuado, é corrigido mais rapidamente na Formulação Hipersingular do que na Singular. Nesta última, erros consideráveis persistem no segundo elemento após o vértice, diferentemente da primeira, onde apenas o elemento imediatamente adjacente tem seus resultados afetados.

CAPITULO V

CONCLUSÕES

5.1 Sobre a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular

Os desenvolvimentos matemáticos da Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular para a Equação de Poisson, detalhados no Capítulo 3, seguem uma linha coerente com aqueles da Formulação Hipersingular para problemas harmônicos, encontrados em alguns trabalhos passados e condensados aqui no Capítulo 2.

A aplicação desta formulação aos três problemas-teste descritos no Capítulo 4, forneceu resultados bastante satisfatórios quando comparados com as respectivas soluções analíticas. Para o problema da torção em uma barra prismática de seção quadrada, por exemplo, excluindo-se os erros nos vértices, que são inerentes ao Método dos Elementos de Contorno quando são usados elementos constantes, os desvios médios ficaram na ordem de 0,3%. Já para a barra homogênea, sujeita à ação gravitacional, as diferenças médias entre resultados numéricos e analíticos ficaram na ordem de 0,9% para as tensões e 1,2% para os deslocamentos na malha mais refinada estudada. Quando gradientes maiores ao potencial foram inseridos neste último problema, com a introdução de uma massa específica parabolicamente variável, os desvios percentuais dobraram, atingindo patamares de 1,9% e 2,5%, respectivamente para tensões e deslocamentos.

Uma perda de eficiência semelhante foi observada neste aumento de gradientes quando a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular foi empregada. No caso, os desvios passaram do 0,4% para 0,7% nos deslocamentos e dos mesmos 0,4% para 0,9% nas tensões.

Com isso, não se pode confirmar, no caso na FDRH, *a priori*, a afirmação recorrente na literatura de que a formulação hipersingular se comporta melhor quando gradientes elevados da variável primal estão envolvidos. Novos estudos merecem ser realizados nesse sentido.

Cabe ressaltar, no entanto, que a FDRH apresentou resultados de melhor precisão para a derivada do potencial quando comparados com os do próprio potencial.

Pode-se considerar, desta forma, a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular como apresentada em suas bases teóricas e validada no presente trabalho.

5.2 Uma Breve Comparação Entre a FDRS e a FDRH

No problema da barra tracionada pelo peso próprio, com massa específica constante ou variável, a FDRH requer malhas mais refinadas para a obtenção de resultados razoáveis, quando comparada com a FDRS, tanto para o potencial (deslocamentos, no caso) quanto para suas derivadas.

Quando gradientes maiores do potencial foram inseridos, com a consideração de massa específica variável, a perda de desempenho das duas formulações foi proporcional, como apontado acima, destacando-se, porém, os resultados mais favoráveis obtidos com a FDRS.

No problema de distribuição de tensões cisalhantes numa seção transversal de uma barra prismática de base quadrada, onde apenas a derivada do potencial é considerada, por sua vez, observa-se uma convergência mais rápida dos resultados da FDRH, à medida que o número de elementos no contorno aumenta. Isto vem de encontro à observação previamente exposta, em que os resultados para a derivada do potencial apresentam melhor exatidão do que os do potencial.

Este exemplo possui a particularidade da ocorrência de grandes erros nos vértices, já amplamente discutida. A magnitude destes erros diminui com o aumento da ordem da função radial interpolante de simples para cúbica, não atingindo, entretanto, valores aceitáveis. Para malhas bem dimensionadas, parece ser justamente o tipo de função interpolante o fator predominante para variação nesta magnitude, conforme se observa na Figura 4.43, do Capítulo 4. Com o incremento da malha, por outro lado, o tipo de formulação passa a ser o fator preponderante, como observado na Figura 4.42, para 64 elementos, onde os desvios para a FDRH são maiores.

Apesar desses maiores erros nas quinas, a FDRH apresenta a vantagem de que já no segundo elemento após o vértice, os desvios caem bruscamente a valores aceitáveis, enquanto que na FDRS, este decaimento é mais lento e, portanto, menos controlável.

Por fim, deve-se destacar o fato de que a FDRH demonstrou maior estabilidade com a variação do tipo de função interpolante em relação à FDRS, conforme se pode observar na comparação das Tabelas 4.9 e 4.10. Para a malha mais refinada (64 elementos de contorno) e 16 pontos internos constitutivos, por exemplo, a FDRS apresentou um erro médio no contorno, excluindo-se os elementos adjacentes aos vértices, de 0,58% para funções interpolantes do tipo radiais simples e de 1,45% para funções radiais cúbicas, enquanto que a FDRH apresentou erro médio de 0,29% nos dois casos.

5.3 Desenvolvimentos Futuros

As simulações numéricas realizadas foram suficientes para validar a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno aqui exposta. Não permitiram, no entanto, que algumas sugestões fossem comprovadas como, por exemplo, a boa eficácia da formulação quando o potencial possui gradientes de ordem elevada. Para que esta hipótese seja realmente examinada, uma gama maior de problemas deve ser abordada pela formulação.

Tais estudos ajudariam também a verificar a tendência, aqui apontada, de uma melhor descrição, pela FDRH, das derivadas da variável primal do que do próprio potencial.

Outra idéia, aqui apresentada, de uma maior invariância dos resultados da FDRH à aplicação de diferentes funções interpolantes, pode ser melhor explorada da mesma forma.

O tema da hipersingularidade, de maneira geral, excluindo os casos específicos de análise de trincas na mecânica da fratura, tem sido pouco explorado e, pelos resultados que vem sendo apresentados, merece ser abordado com maior profundidade.

APENDICE A - PROBLEMA CORRELATO E SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

No desenvolvimento das equações do Método dos Elementos de Contorno, a escolha da função de ponderação a ser aplicada na formulação integral inversa do problema de Laplace deve ser tal que elimine a integral de domínio remanescente. Desta forma, é conveniente definir $u^*(\mathbf{X})$ como sendo a solução de um problema de domínio infinito, regido pela equação de Poisson, onde a carga externa atua pontualmente em ξ , conforme descrito na Equação (A.1) e ilustrado na Figura A.1.

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{X}) = -\Delta(\xi; \mathbf{X}) \quad (\text{A.1})$$

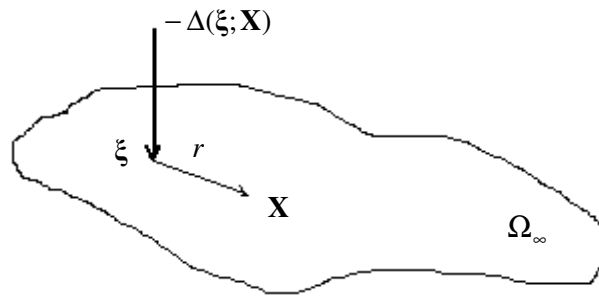


Figura A.1 - Problema correlato para equação de Laplace

O termo $[\Delta(\xi; \mathbf{X})]$ é a função Delta de Dirac, cuja propriedade principal é apresentada na Equação (A.2), válida para pontos ξ internos ao domínio de integração.

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \Delta(\xi; \mathbf{X}) d\Omega = f(\xi) \quad (\text{A.2})$$

Considerando domínios bidimensionais, a solução do problema (A.1), denominado *problema correlato*, é apresentada na Equação (A.3) e recebe o nome de *solução fundamental*.

$$u^*(\xi; \mathbf{X}) = \frac{-1}{2\pi} \ln(r) \quad (\text{A.3})$$

Nesta relação, r representa a distância euclidiana entre o ponto fonte ξ e os demais pontos do domínio, conforme destacado na Equação (A.4) e na Figura A.2.

$$r = \{[x_1(\mathbf{X}) - x_1(\xi)]^2 + [x_2(\mathbf{X}) - x_2(\xi)]^2\}^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

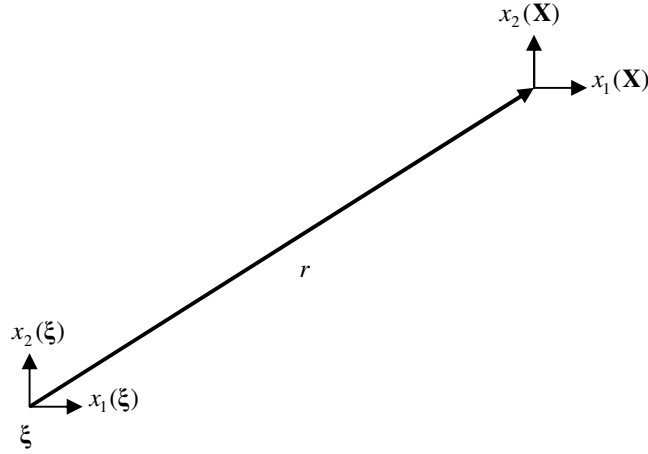


Figura A.2 - Distância entre o ponto fonte do problema correlato e um ponto qualquer do domínio

As Equações (A.5) a (A.8) destacam algumas derivadas direcionais importantes de r , enquanto que as Equações (A.9) a (A.11) apresentam derivadas da solução fundamental.

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} = \frac{1}{2r} \{2[x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)]\} = \frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)}{r} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} = \frac{1}{2r} \{-2[x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)]\} = \frac{x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})}{r} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial r}{\partial n(\mathbf{X})} = \frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = \left[\frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)}{r} \right] n_i(\mathbf{X}) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial r}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = \left[\frac{x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})}{r} \right] n_i(\xi) \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} q^*(\xi; \mathbf{X}) &= \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial x_i(\mathbf{X})} \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} \right) n_i(\mathbf{X}) = \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} [x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)] n_i(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) &= \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial x_i(\xi)} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \right) n_i(\xi) = \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} [x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})] n_i(\xi) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
p^*(\xi; \mathbf{X}) &= \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial^2 u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X}) \partial n(\xi)} = \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial x_i(\xi)} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i(\xi)} \left\{ \frac{x_i(\xi) n_i(\mathbf{X})}{2\pi^2} - \frac{x_i(\mathbf{X}) n_i(\mathbf{X})}{2\pi^2} \right\} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = \\
&= \left\{ \frac{-1}{\pi^3} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \right) [x_j(\xi) - x_j(\mathbf{X})] n_j(\mathbf{X}) + \frac{n_i(\mathbf{X})}{2\pi^2} \right\} n_i(\xi) = \\
&= \frac{-1}{\pi^4} [x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})] [x_j(\xi) - x_j(\mathbf{X})] n_i(\xi) n_j(\mathbf{X}) + \frac{n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)}{2\pi^2} = \\
&= \frac{1}{2\pi^4} \left\{ 2[x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})] [x_j(\mathbf{X}) - x_j(\xi)] n_i(\xi) n_j(\mathbf{X}) + r^2 n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi) \right\}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

APENDICE B - INTEGRAIS AO LONGO DO CONTORNO AMPLIADO PARA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR

B.1 Termo Oriundo do Laplaciano do Potencial

O desenvolvimento a seguir visa transformar a Equação (2.40), repetida aqui no termo (B.1), numa expressão passível de ser tratada numericamente.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (\text{B.1})$$

Considerando apenas o núcleo da integral acima, tem-se a relação (B.2) apresentada a seguir, para um domínio bidimensional.

$$\begin{aligned} & [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) = \\ & [n_1(\mathbf{X})n_1(\xi) + n_2(\mathbf{X})n_2(\xi)] \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\mathbf{X}) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\mathbf{X}) \right] = \\ & \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_1(\mathbf{X})] + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] [n_2(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] + \\ & + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] = \\ & \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.2a}) + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] (\text{B.2b}) + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.2c}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Apenas os termos (B.2a), (B.2b) e (B.2c) permanecem como argumentos da integral em (B.1). Desta forma, tem-se três integrais que podem ser resolvidas analiticamente como a seguir, após a substituição das Equações (B.3) e (B.4), obtidas da simples análise da Figura B.1.

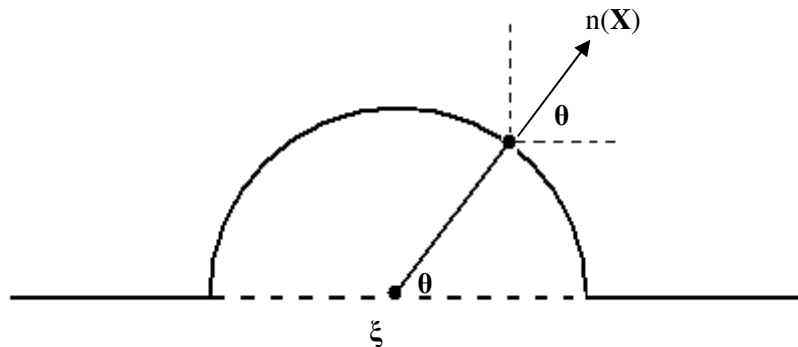


Figura B.1 - Setor circular de integração

$$n_1(\mathbf{X}) = \cos(\theta) \quad (\text{B.3})$$

$$n_2(\mathbf{X}) = \text{sen}(\theta) \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [n_1(\mathbf{X})n_1(\mathbf{X})]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\cos(\theta)]^2 d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [n_2(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\text{sen}(\theta)]^2 d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (\text{B.6})$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [n_1(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\cos(\theta)\text{sen}(\theta)]d\theta = \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (\text{B.7})$$

Com o desenvolvimento apresentado em (B.2) e considerando as relações (B.5) a (B.7), o termo (B.1) assume a forma destacada em (B.8).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] =$$

$$\frac{1}{\pi} \left\{ q_1(\xi)n_1(\xi) \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + q_2(\xi)n_2(\xi) \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \right.$$

$$\left. + [q_1(\xi)n_2(\xi) + q_2(\xi)n_1(\xi)] \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} = \quad (\text{B.8})$$

$$[q_1(\xi)n_1(\xi) + q_2(\xi)n_2(\xi)] \left[\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \right] +$$

$$+ q_1(\xi) \left[\frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] +$$

$$+ q_2(\xi) \left[-\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] =$$

$$s(\xi)q(\xi) + w_k(\xi)q_k(\xi)$$

B.2 Termo Oriundo da Carga de Domínio

Aqui, a integral a ser trabalhada encontra-se na Equação (3.32) e é destacada a seguir, em (B.9).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (\text{B.9})$$

Comparando (B.9) com a integral (B.1), percebe-se que o desenvolvimento a ser dado aqui se trata de uma repetição do que foi realizado no item B.1 acima, com a simples substituição de $\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)$ por $u(\xi)$. Por coerência, o procedimento é detalhado a seguir.

Desta forma, considerando agora, apenas o núcleo da integral (B.9), tem-se a relação (B.10) apresentada a seguir, para um domínio bidimensional.

$$\begin{aligned} & [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) = \\ & [n_1(\mathbf{X})n_1(\xi) + n_2(\mathbf{X})n_2(\xi)] \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\mathbf{X}) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\mathbf{X}) \right] = \\ & \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_1(\mathbf{X})] + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] [n_2(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] = \\ & \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.10a}) + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] (\text{B.10b}) + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.10c}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Novamente, apenas os termos (B.10a), (B.10b) e (B.10c) permanecem como argumentos da integral em (B.9). Assim, as três integrais geradas, são resolvidas exatamente como em (B.5), (B.6) e (B.7).

A substituição desses resultados em (B.9) leva à Equação (B.11), pronta para ser tratada numericamente.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] = \\
& \frac{1}{\pi} \left\{ \eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_1(\xi) \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_2(\xi) \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \right. \\
& \left. + [\eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_2(\xi) + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_1(\xi)] \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} = \\
& \hspace{15em} \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_1(\xi) + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_2(\xi)] \left[\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \right] + \\
& + \eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) \left[\frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] + \\
& + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) \left[-\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] = \\
& s(\xi) \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) + w_k(\xi) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi)
\end{aligned}$$

APENDICE C - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA TORÇÃO; ANALOGIA COM A MEMBRANA

Neste Apêndice, uma solução analítica para a distribuição de tensões cisalhantes numa dada seção transversal de uma barra prismática de base retangular, sujeita à torção, é obtida a partir de uma analogia com o problema de uma membrana uniformemente carregada. Uma descrição mais detalhada do problema é realizada no Capítulo IV.

O domínio do problema é apresentado na Figura C.1, onde se pode visualizar a seção transversal retangular com a origem do eixo de coordenadas cartesianas em um de seus vértices.

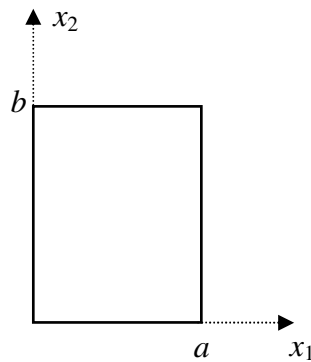


Figura C.1 - Domínio do Problema

A equação a ser trabalhada é aquela apresentada na Equação (C.1) a seguir.

$$\nabla^2 w(x_1, x_2) = \phi_o \quad (C.1)$$

Nesta equação, a carga de domínio, ϕ_o , deve ser entendida como constante que, para o problema da membrana, representaria a razão entre a pressão, p_o , e a tração por unidade de comprimento no contorno, T , enquanto que, para a torção, representaria o dobro do produto entre o módulo de elasticidade angular do material, G , e o ângulo de rotação, por unidade de comprimento da barra, θ , da seção em questão. Os dois casos precedidos do sinal negativo, conforme Equação (C.2).

$$\phi_o = -\frac{p_o}{T} = -2G\theta \quad (C.2)$$

O primeiro passo para a solução da Equação (C.1) consiste em definir uma base para o espaço vetorial, de dimensão infinita, das funções contínuas por partes e integráveis, no domínio destacado na Figura C.1, na qual ϕ_o é projetada. Uma escolha apropriada consiste nas funções senoidais destacadas em (C.3).

$$\left\{ \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right\} \quad (\text{C.3})$$

$$m, n = 1, 2, \dots, \infty$$

Pela ortogonalidade da base apresentada acima, a carga de domínio pode ser reescrita na combinação linear apresentada na Equação (C.4).

$$\phi_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \quad (\text{C.4})$$

Os valores dos coeficientes λ_{mn} são determinados pela projeção da carga de domínio na direção definida por cada vetor da base, *i.e.*, são dados pela razão entre o produto interno de ϕ_o com cada vetor da base e a norma destes vetores, conforme destacado na Equação (C.5).

$$\lambda_{mn} = \frac{\left(\phi_o, \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right)}{\left\| \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right\|} \quad (\text{C.5})$$

$$m, n = 1, 2, \dots, \infty$$

O cálculo da norma de cada vetor da base é detalhado a seguir no desenvolvimento (C.6).

$$\begin{aligned} \left\| \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right\| &= \int_0^a \int_0^b \left[\text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right]^2 dx_2 dx_1 = \\ &= \left\{ \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) dx_1 \right\} \left\{ \int_0^b \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) dx_2 \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \left\{ \int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi x_1}{a}\right) \right] dx_1 \right\} \left\{ \int_0^b \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_2}{b}\right) \right] dx_2 \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{a}{2m\pi}\right) \left(\frac{b}{2n\pi}\right) (2m\pi)(2n\pi) = \frac{ab}{4} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

O produto interno da carga de domínio por cada vetor da base, por sua vez, é detalhado a seguir no desenvolvimento (C.7).

$$\begin{aligned}
\left(\phi_o, \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right) &= \int_0^a \int_0^b \left[\phi_o \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \right] dx_2 dx_1 = \\
&= \phi_o \left\{ \int_0^a \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) dx_1 \right\} \left\{ \int_0^b \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) dx_2 \right\} = \\
&= \phi_o \left(\frac{a}{m\pi} \right) \left(\frac{b}{n\pi} \right) \left\{ \int_0^{m\pi} \text{sen}(u) du \right\} \left\{ \int_0^{n\pi} \text{sen}(v) dv \right\} = \\
&= \phi_o \left(\frac{a}{m\pi} \right) \left(\frac{b}{n\pi} \right) \left[-\cos(u) \right]_0^{m\pi} \left[-\cos(v) \right]_0^{n\pi} = \\
&= \begin{cases} 4\phi_o \left(\frac{a}{m\pi} \right) \left(\frac{b}{n\pi} \right) = \frac{4\phi_o}{\pi^2} \frac{ab}{mn} & \text{para } m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{para } m, n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Com estes dois últimos resultados, a Equação (C.5) para os coeficientes λ_{mn} assume a forma apresentada na Equação (C.8).

$$\lambda_{mn} = \frac{16\phi_o}{mn\pi^2} \tag{C.8}$$

$$m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Introduzindo o resultado (C.8) em (C.4) e substituindo a expressão resultante em (C.1), tem-se a nova equação para o problema, apresentada em (C.9) a seguir.

$$\nabla^2 w(x_1, x_2) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{16\phi_o}{mn\pi^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \tag{C.9}$$

Para solução da Equação (C.9), admite-se um comportamento do potencial semelhante ao da carga de domínio, conforme Equação (C.10).

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \tag{C.10}$$

Derivando a função acima duas vezes com relação a cada direção, obtêm-se os resultados (C.11) e (C.12) a seguir.

$$\frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \quad (\text{C.12})$$

Utilizando estes dois últimos resultados no lugar do laplaciano de w na Equação (C.9), chega-se à relação (C.13), a partir da qual se determinam os coeficientes c_{mn} , conforme detalhado no desenvolvimento (C.14).

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{mn} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) = \\ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{16\phi_o}{mn\pi^2} \text{sen} \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} c_{mn} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) &= - \frac{16\phi_o}{mn\pi^2} \\ \therefore c_{mn} &= - \frac{16\phi_o}{\pi^4 mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Com estes coeficientes, obtém-se o resultado final pra o potencial, apresentado a seguir em (C.15).

$$w(x_1, x_2) = - \frac{16\phi_o}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (\text{C.15})$$

Conforme descrito no Capítulo IV, as tensões cisalhantes são obtidas a partir dos gradientes da função acima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C.; *Boundary Element Techniques*; Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. BANERJEE, P.K.; *The Boundary Element Methods in Engineering*; 2nd Ed. McGraw-Hill, UK, 1994.
3. TELLES, J.C.F., PRADO, A.A.; *Hyper-Singular Formulation for 2-D Potencial Problems; Chapter 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods*; ALIABADI, M.H., BREBBIA, C.A. (Editors); Elsevier, London, UK, 1993.
4. MANSUR, W.J., FLEURY Jr., P., AZEVEDO, J.P.S.; *A Vector Approach to the Hyper-singular BEM Formulation for Laplace's Equation in 2D*; *International Journal of BEM Communication* 8, p. 239-250; 1997.
5. PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C.; *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*; Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.
6. PRADO, A.A.; *Uma Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais*; Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1991.
7. HUACASI, W., MANSUR, W.J., AZEVEDO, J.P.S.; *A Novel Hyper-singular BEM Formulation for Three-Dimensional Potential Problems*, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. XXV, 4, 2003.
8. PAULINO, G.; *Singular Integrals*; *Boundary Element Methods CEE 498, Fall September*, 2001.
9. NARDINI, D., BREBBIA, C.A.; *A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements*; *Proceedings of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering*, 1982.
10. TIMOSHENKO, S.P.; *Strength of Materials - Vol. II*; D. Van Nostrand Company, Inc., USA, 1958.