

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CARLOS ALEXANDRE SANTÓRIO

*Um Novo Perfil Interpolante Aplicado ao
Método de Volumes Finitos em Situações
Une e Bidimensionais*

Vitória (ES)
2002

CARLOS ALEXANDRE SANTÓRIO

***Um Novo Perfil Interpolante Aplicado ao Método de
Volumes Finitos em Situações Une e Bidimensionais***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira.

**Vitória (ES)
2002**

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

S237n Santório, Carlos Alexandre, 1970-
Um novo perfil interpolante aplicado ao método de volumes finitos em situações unidimensionais e bidimensionais / Carlos Alexandre Santório. – 2002. 80 f. : il.

Orientador: Paulo César Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Método dos volumes finitos. 2. Análise numérica. 3. Spline, Teoria do. I. Oliveira, Paulo César. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

*Um Novo Perfil Interpolante Aplicado ao
Método de Volumes Finitos em Situações
Une e Bidimensionais*

CARLOS ALEXANDRE SANTÓRIO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Aprovada por:

Prof. Dr. Paulo César Oliveira (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Prof. Dr. Webe Mansur

Vitória (ES), 17 de dezembro de 2002.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho *in memoriam* do meu irmão CHRISTIANO SABADINI IACOMINI.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus e a Nossa Senhora da Penha pela saúde e a proteção divina, pois sem elas nada seria possível.

À minha família pelo apoio e compreensão para a conclusão deste trabalho, principalmente à minha esposa Marcilene e aos meus filhos, Filipe e Caroline.

Ao Prof. Paulo César Oliveira pela impecável orientação, pela amizade e pelo constante apoio e força nos momentos de “desentusiasmos”.

Aos colegas, professores e funcionários do PPGEM pela colaboração obtida nesses anos de estudos.

RESUMO

Neste trabalho, um novo esquema de discretização, para o método de volumes finitos, denominado FLEX, foi proposto para a simulação de problemas governados por equações diferenciais do tipo elíptico e hiperbólico.

Seu desempenho foi avaliado através de problemas testes oriundos da literatura de métodos numéricos e por testes construídos ao longo do trabalho. O novo esquema mostrou características de convergência e estabilidade compatíveis e comparáveis aos esquemas tradicionais de Diferença Central, Power Law e Flux-Spline. Sua precisão mostrou-se depender do tipo de problema físico.

Problemas físicos governados por equações diferenciais parciais elípticas envolvendo convecção-difusão, que possuem uma distribuição da variável fluxo, similar àquela proposta pelo esquema FLEX, apresentaram uma solução com um nível de erro menor, em comparação com os esquemas restantes. No caso de problemas tradicionais desta classe, onde não haja a presença de tal característica específica, os resultados se mostraram intermediários.

Para problemas hiperbólicos, mesmo com uma pobre discretização em termos de diferença finita para o termo transiente, o novo esquema mostrou características interessantes para a simulação deste tipo de fenômeno, no sentido de, mesmo para malhas não refinadas, convergir para a solução de referência numa taxa maior que os dois outros esquemas aqui mencionados e usados na comparação.

ABSTRACT

In this report, a new scheme of discretization for the method of finite bulks, called “FLEX” which was proposed for a simulation of problems ruled by differential equations as type of elliptic and hyperbolic.

Its performance was appraised through tests from the literature of numeric methods and through tests developed for all the report. The new scheme showed features of convergence and compatible and comparable stabilities to the traditional schemes of Central Difference, “Power Law” and “Flux-Spline”. Its accuracy appeared to depend on the type de physical problem.

Physical problems ruled by differential partial elliptic equations implied convection-diffusion which owns a distribution of the variable flux like one purpose by the “FLEX” scheme which showed a solution with the level of the error minor, in comparison with the remaining schemes. In the traditional problems case of this class, where there isn't the presence with this specific featuring the results proved to be intermediaries.

To hyperbolic problems even with a poor discretization within limits of finite difference to the transient term the new scheme appeared interesting features for a simulation of this kind of phenomena in the same sense to non-refined mails to converge to the solution of reference in the rate greater than the others two schemes which were mentioned here and used in the comparison.

NOMENCLATURA

Letras Latinas

A	função real de argumento real presente no perfil interpolante.
AP	
AIP	
AIM	coeficientes da equação de discretização.
AJP	
AJM	
BJ	
CJ	coeficientes da equação de discretização do fluxo total J.
DJ	
BJX	
CJX	coeficientes da equação de discretização do fluxo total Jx.
DJX	
BJY	
CJY	coeficientes da equação de discretização do fluxo total Jy.
DJY	
COM	termo fonte da equação de discretização.
G	função real de argumento real presente no perfil interpolante.
J	fluxo total (convectivo + difusivo) da variável dependente.
Jx	fluxo total na direção X.
Jy	fluxo total na direção Y.
P	pressão ou número de Péclet.
Px	número de Péclet baseado no fluxo mássico $\mathbf{r}U$ na direção X.
Py	número de Péclet baseado no fluxo mássico $\mathbf{r}V$ na direção Y.
Q	função real de argumento real do esquema FLEX.
S	termo fonte responsável pela movimentação do fluido.
Sc	parte constante do termo fonte S.
Sp	parte do termo fonte S função da variável dependente.
U	componente na direção X do vetor velocidade.
V	componente na direção Y do vetor velocidade.

X, Y	coordenadas cartesianas adimensionais.
a	coeficiente na equação de discretização.
b	parte constante ou linearizada da equação de discretização.
T	temperatura.

Letras Gregas

ΔX	comprimento do volume de controle na direção X.
ΔY	comprimento do volume de controle na direção Y.
f	variável dependente transportada.
Γ	coeficiente de difusão.
r	densidade absoluta do fluido.
ε	erro percentual absoluto.

Superescritos

o	valor da variável na iteração anterior.
+	indica uma quantidade à direita ou acima da colocação da variável dependente no volume de controle.
–	indica uma quantidade à esquerda ou abaixo da colocação da variável dependente no volume de controle.

Subscritos

i	posição discreta em X.
j	posição discreta em Y.
max	indica o valor máximo dentro do domínio.
min	indica o valor mínimo dentro do domínio.

Abreviação

Pe	número de Péclet
----	------------------

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 – A tarefa do método numérico: (a) equação diferencial e condições de contorno, (b) sistema de equações algébricas.
- Figura 2.1 – Um típico volume de controle unidimensional mostrando as posições de J.
- Figura 2.2 – Volume de controle bidimensional e seus parâmetros.
- Figura 2.3 – Volumes de Controle para cálculo de convecção-difusão.
- Figura 2.4 – Distribuição de J e ru ao longo do domínio X.
- Figura 2.5 – Comportamento das funções A(P) e Q(P).
- Figura 2.6 – Volume de controle bidimensional e seus parâmetros.
- Figura 3.1 – Gráfico tridimensional da solução analítica do problema teste 1.
- Figura 3.2 – Gráfico do erro percentual para $\Delta = 1/16$, $\Delta = 1/32$ e $\Delta = 1/64$.
- Figura 3.3 – Região quadrada na casca cilíndrica.
- Figura 3.4 – Gráficos: (a) tridimensional e (b) bidimensional (*iso*-linhas), da solução analítica.
- Figura 3.5 – Gráfico do erro percentual para $\Delta = 1/5$, $\Delta = 1/10$, $\Delta = 1/15$ e $\Delta = 1/20$.
- Figura 3.6 – Gráfico do erro percentual para $\Delta = 1/15$.
- Figura 3.7 – Transporte de um pulso em ϕ numa região de velocidade constante.
- Figura 3.8 – Transporte convectivo de um pulso em f : perfil na linha central ($X = 4,5$) para: (a) $Y_c = 4,5$ ($\theta = 0,00^\circ$) e (b) $Y_c = 3,5$ ($\theta = 12,53^\circ$).
- Figura 3.9 – Transporte convectivo de um pulso em f : perfil na linha central ($X = 4,5$) para: (a) $Y_c = 2,5$ ($\theta = 23,96^\circ$) e (b) $Y_c = 1,5$ ($\theta = 33,69^\circ$).
- Figura 3.10 – Transporte convectivo de um pulso em f : perfil na linha central ($X = 4,5$) para: (a) $Y_c = 0,5$ ($\theta = 41,63^\circ$) e (b) $Y_c = 0,0$ ($\theta = 45,00^\circ$).
- Figura 3.11 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 4,5$ ($\theta = 0,00^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.
- Figura 3.12 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 3,5$ ($\theta = 12,53^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.
- Figura 3.13 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 2,5$ ($\theta = 23,96^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.
- Figura 3.14 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 1,5$ ($\theta = 33,69^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.
- Figura 3.15 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 0,5$ ($\theta = 41,63^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.
- Figura 3.16 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 0,0$ ($\theta = 45,00^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.
- Figura 3.17 – Características da barra unidimensional.

- Figura 3.18 – Deslocamento da onda (ponto A), com $\Delta t = 1/400$, $\Delta = 1/9$.
- Figura 3.19 – Deslocamento da onda (ponto A), com $\Delta t = 1/400$, $\Delta = 1/27$.
- Figura 3.20 – Características do problema bidimensional.
- Figura 3.21 – Deslocamento da placa plana sob malha de 321 x 321 volumes de controle usando o método de DIF. CENTRAL.
- Figura 3.22 – Linhas de deslocamento constante da placa plana sob malha de 321 x 321 volumes de controle usando o método de DIF. CENTRAL.
- Figura 3.23 – Deslocamento da onda para 31 x 31 volumes de controle (referência: DIF. CENTRAL): (a) ao longo de X na linha BB' e (b) ao longo do tempo (ponto A).
- Figura 3.24 – Deslocamento da onda para 61 x 61 volumes de controle (referência: DIF. CENTRAL): (a) ao longo de X na linha BB' e (b) ao longo do tempo (ponto A).
- Figura 3.25 – Deslocamento da onda para 121 x 121 volumes de controle (referência: DIF. CENTRAL): (a) ao longo de X na linha BB' e (b) ao longo do tempo (ponto A).
- Figura 3.26 – Termo fonte em função do tempo.
- Figura 3.27 – Características do problema bidimensional.
- Figura 3.28 – Deslocamento da onda na placa plana sob malha de 243 x 243 volumes de controle usando o método de DIF. CENTRAL.
- Figura 3.29 – Deslocamento da onda ao longo da linha central ($Y = 0,5$), para malha de 27 x 27 volumes de controle.
- Figura 3.30 – Deslocamento da onda ao longo da linha central ($Y = 0,5$), para malha de 81 x 81 volumes de controle.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	14
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	14
1.2. MOTIVAÇÃO.....	15
1.3. OBJETIVOS	16
1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
1.5. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO	18
2. DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO DO ESQUEMA FLEX.....	20
2.1. MÉTODO DE VOLUMES FINITOS.....	20
2.1.1. Método de solução para difusão pura	21
2.1.1.1. <i>Difusão unidimensional</i>	21
2.1.1.2. <i>Difusão bidimensional</i>	29
2.1.2. Método de solução para convecção-difusão.....	32
2.1.2.1. <i>Convecção-difusão unidimensional</i>	32
2.1.2.2. <i>Convecção-difusão bidimensional</i>	39
3. APLICAÇÃO DO ESQUEMA FLEX.....	45
3.1. REGIME PERMANENTE.....	45
3.1.1. Difusão Pura.....	45
<i>Problema Teste 1</i>	45
<i>Problema Teste 2</i>	47
3.1.2. Convecção-Difusão.....	50
<i>Problema Teste 3</i>	50
<i>Problema Teste 4</i>	51
3.1.3. Conclusões sobre Regime Permanente.....	62
3.2. REGIME TRANSIENTE	62
3.2.1. Difusão Pura.....	62
<i>Problema Teste 5</i>	62
<i>Problema Teste 6</i>	63
<i>Problema Teste 7</i>	67
4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	76
4.1. CONCLUSÕES.....	76
4.2. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE.....	77
REFERÊNCIAS.....	79

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A simulação numérica de problemas de interesse econômico em Mecânica dos Fluidos, Transferência de Calor e Massa e Propagação de Ondas, teve um desenvolvimento impressionante nos últimos 20 anos. Inicialmente, como uma ferramenta para análise de problemas físicos em nível de investigação científica e, atualmente, como uma ferramenta poderosa para a solução de importantes problemas aplicados na engenharia.

O uso de técnicas numéricas para a solução de complexos problemas da engenharia e da física é, hoje, uma realidade, graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Em função dessa disponibilidade computacional, o desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos analistas numéricos.

A tarefa do método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais parciais, substituindo as derivadas existentes na equação por expressões algébricas que envolvam a função incógnita. Um método analítico que tivesse a habilidade de resolver tais equações nos daria a solução em uma forma fechada e seria possível, então, calcular os valores das variáveis dependentes em nível infinitesimal, isto é, para um número infinito de pontos.

Por outro lado, quando decidimos fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, aceitamos ter a solução para um número discreto de pontos, esperando que, quanto maior for este número de pontos, mais próximo da solução exata será nossa solução aproximada (ou numérica). É fácil entender então que, se decidirmos calcular 100 valores da variável no domínio, teremos 100 incógnitas, sendo necessárias 100 equações algébricas para o fechamento, formando um sistema de 100 equações a 100 incógnitas. Se quisermos tornar mais precisos nossos cálculos, aumentando o número de incógnitas, o sistema de equações a ser resolvido também vai aumentando, proporcionalmente. O esforço computacional também cresce, pois se o problema é não linear temos inevitavelmente um procedimento iterativo envolvido.

A figura 1.1 exemplifica a tarefa do método numérico, na qual uma equação diferencial escrita em nível infinitesimal e definida para o domínio D é transformada em um sistema de equações algébricas. Para isto, as derivadas da função existentes na equação diferencial devem ser substituídas pelos valores discretos da função. A maneira de obter essas equações algébricas é que caracteriza o tipo do método numérico.

Nosso estudo neste trabalho será apenas com o método de volumes finitos.

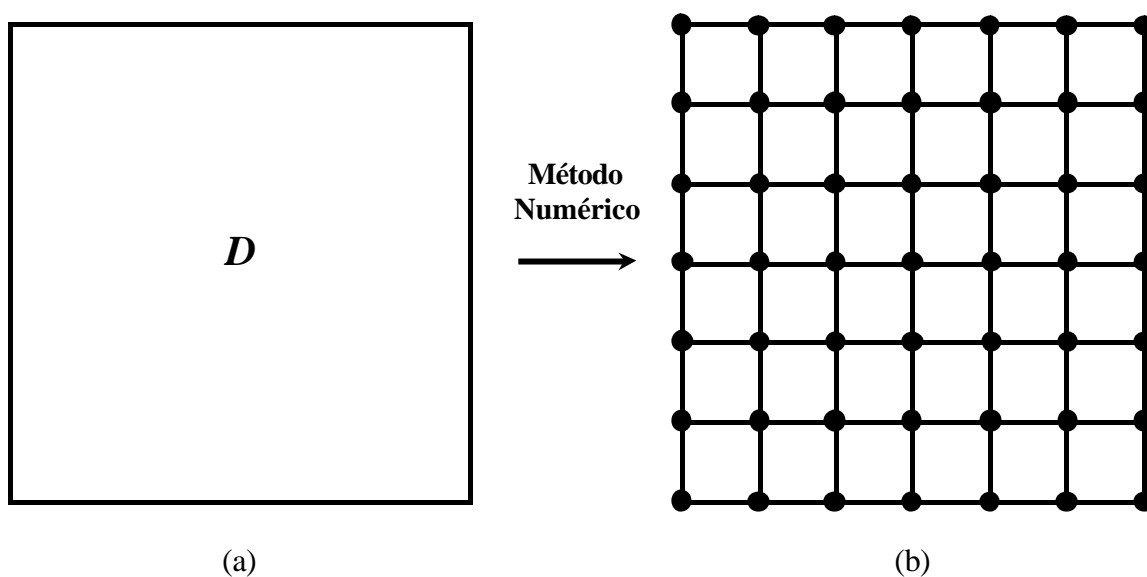


Figura 1.1 – A tarefa do método numérico: (a) equação diferencial e condições de contorno, (b) sistema de equações algébricas.

1.2. MOTIVAÇÃO

A simulação numérica envolve equações de conservação contendo termos descrevendo a dependência do tempo, transporte pelo campo de velocidades (convecção), transporte por gradientes (difusão) e fontes da propriedade que está sendo transportada. A solução numérica dessas equações requer o uso de interpolação entre pontos discretos no cálculo do domínio.

Na teoria, um método numérico produz uma solução exata de um modelo matemático quando o espaçamento da malha se aproxima de zero. No entanto, o espaçamento da malha não pode ser infinitesimal, devido à capacidade de armazenamento (memória) do computador. Além disso, o número de iterações necessárias, no caso de problemas não lineares, para atingir a convergência da solução numérica aumenta com a diminuição do tamanho da malha. Isso é mais pronunciado em problemas não lineares como escoamento forçado e convecção natural, embora esteja presente em todos desta classe. Assim, mesmo que malhas infinitesimais pudessem ser usadas, a quantidade de cálculo computacional seria muito grande, tornando o tempo computacional também muito grande.

Por essas razões, existe a necessidade de se estudar métodos numéricos mais sofisticados, que forneçam precisão suficiente, mesmo para um número menor de pontos da malha.

1.3. OBJETIVOS

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar a aplicação de um novo esquema de discretização para volumes finitos, denominado FLEX. A fim de reduzir o esforço computacional, esse novo esquema admite uma variação do tipo exponencial, do fluxo da variável dependente transportada dentro de cada volume de controle.

Pequenas modificações aparecem no esquema FLEX, em relação ao esquema FLUX-SPLINE, cujos cálculos não possuem qualquer dificuldade.

Esse novo esquema foi testado para vários problemas testes e comparado com os esquemas de DIFERENÇA CENTRAL e FLUX-SPLINE.

1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

VAREJÃO (1979) em seu trabalho de tese, a fim de reduzir esforço computacional, demonstrou que uma variação linear do fluxo total dentro do volume de controle, promove soluções mais próximas daquelas tomadas como referência, sob malhas menos refinadas. Sob essa variação linear, o valor do fluxo total é armazenado na face do volume de controle, enquanto que a variável dependente é armazenada nos pontos da malha. O nome dado a esse esquema é FLUX-SPLINE.

Num esquema interpolante SPLINE, um perfil polinomial é assumido para a variável dependente. No esquema FLUX-SPLINE um perfil linear é assumido para o fluxo total, mas o perfil da variável dependente é determinado de acordo com o fenômeno envolvido, pela resolução de da equação diferencial que une a definição de fluxo com a hipótese de variação linear dentro do volume de controle.

O método FLUX-SPLINE foi testado em vários problemas teste para difusão pura, convecção-difusão e escoamentos, sempre apresentando resultados superiores quando comparado com o esquema de DIF. CENTRAL e POWER LAW (PATANKAR (1980)).

PATANKAR (1980) em seu livro, mostra a dedução completa das formulações para volumes finitos, dos esquemas DIFERENÇA CENTRAL para difusão pura e suas limitações no caso de convecção-difusão em termos de só funcionar para baixos números de Peclet, traz a definição do esquema POWER LAW como uma simplificação do esquema exponencial, para problemas de convecção-difusão e promove sua aplicação em problemas de escoamento para a solução das equações de Navier-Stokes. Não há, ao longo do livro, uma preocupação em se buscar um perfil mais adequado a cada fenômeno no sentido de maior eficiência, mas sim em ter-se um esquema, que funcione sob qualquer malha ou campo de velocidade.

NIECKELE (1985) desenvolveu um esquema denominado FLUX-SPLINE CÚBICO (FLUX33) assumindo que o fluxo de massa e total, variam de forma cúbica dentro do volume de controle. O perfil da variável dependente é obtido pela resolução da equação diferencial que une a definição de fluxo à hipótese de perfil cúbico. Para situações de difusão pura, o perfil da variável dependente torna-se de quarta ordem, e para situações de convecção-difusão resulta em uma soma de termos exponenciais mais um polinômio de terceira ordem.

Em seu trabalho, foram testados dezesseis esquemas de discretização e desta forma, estabeleceu através de comparação direta em termos de erro, com relação a uma solução analítica ou em casos onde esta não existe, em relação a uma solução de referência, obtida por meio de uma malha extremamente refinada, o esforço computacional de seu esquema em relação aos demais. Pelos resultados obtidos pelo esquema FLUX33, o mesmo se mostrou superior na maioria dos casos, quando comparado com esses dezesseis esquemas (incluindo os esquemas DIFERENÇA CENTRAL, POWER LAW e FLUX-SPLINE). Vale dizer, que para um determinado erro, este esquema produz soluções sob malhas menos refinadas o que acarreta obter-se a solução convergida em menos tempo que os demais. Por sua complexidade e difícil extensão a problemas de escoamento, não será empregado neste trabalho.

OLIVEIRA (1997) utilizou o esquema FLUX-SPLINE para obter a solução de escoamentos em cavidades abertas acionadas por convecção natural, onde as condições de contorno eram de segunda espécie (Neumann), ou seja, se conhecia apenas os fluxos em algumas fronteiras. Seu algoritmo de solução proposto foi simplificado em relação ao usado no trabalho original de VAREJÃO (1979) pelo fato do problema envolver a solução de um sistema de quatro equações diferenciais parciais não lineares acopladas pelo campo de velocidades e temperatura. Abordou também, a utilização do esquema em problemas teste da literatura, onde se faziam presentes regiões com altos gradientes ao lado de outras sem nenhuma perturbação, mostrando a superioridade do esquema quando comparado aos esquemas DIFERENÇA CENTRAL, QUICK e POWER LAW.

1.5. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

O desenvolvimento deste trabalho está distribuído na seqüência dos capítulos 2, 3 e 4 que se seguem.

No capítulo 2 são apresentadas as formulações do método volumes finitos para o esquema de discretização denominado FLEX.

No capítulo 3 a aplicação do esquema se deu para problemas de difusão pura e convecção-difusão em situações uni e bidimensionais em problemas elípticos e em situações uni e bidimensionais em problemas hiperbólicos (propagação de ondas).

São apresentados e simulados sete problemas teste para difusão pura e convecção-difusão. Esses problemas teste foram extraídos dos autores listados na referência bibliográfica e representam as dificuldades presentes em grande parte dos problemas físicos a serem simulados em trabalhos de engenharia.

No capítulo 4, são apresentadas as conclusões baseadas na observação dos resultados descritos através de gráficos e recomendações para futuros trabalhos no sentido de aumentar o desempenho do esquema aqui proposto.

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO DO ESQUEMA FLEX

2. DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO DO ESQUEMA FLEX

O objetivo deste capítulo é apresentar o desenvolvimento de um novo esquema de discretização para volumes finitos, com o objetivo de minimizar esforço computacional em problemas que envolvam várias dimensões e/ou dependência com o tempo. Tal esquema será denominado FLEX.

Admite-se que o leitor esteja familiarizado com o método de volumes finitos, sendo, portanto omitidos alguns passos não essenciais ao longo da derivação do esquema.

2.1. MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

A obtenção da solução da esmagadora maioria dos problemas físicos descritos por equações diferenciais, requer habilidade de criação do modelo numérico correspondente. Este deve ser tal que, os resultados obtidos, à medida que se aumenta o número de incógnitas (refinamento da malha) do sistema de equações algébricas geradas pelo método numérico, haja uma melhor representação do fenômeno físico sob estudo.

A tarefa de um método numérico é transformar uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes na equação por expressões algébricas que envolvem a função incógnita.

As equações de conservação (massa, quantidade de movimento, energia, etc.) podem ser escritas, no sistema cartesiano de coordenadas, para um campo escalar geral f , neste caso expandindo os termos, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}f) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}uf) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{r}vf) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{r}wf) = \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial z}\right) + S^f \end{aligned} \quad (2.1)$$

A equação (2.1) representa a conservação da massa, quando S^f for igual a zero e $f = 1$. As equações do movimento nas três direções são obtidas fazendo-se f igual aos componentes do vetor velocidade, u , v e w , com o apropriado termo fonte, que, neste caso, inclui o gradiente de pressão. A equação da energia é obtida fazendo-se $f = T$, também com o termo fonte apropriado. Γ^f representa-se o produto da difusividade pela massa específica da propriedade

transportada em consideração. Para as equações de Navier-Stokes, $\Gamma^f = \mathbf{m}$ e para a equação da energia, $\Gamma^f = k/c_p$, quando o escoamento é laminar, e é igual a $\mathbf{m}_{efetivo}$ e $(k/c_p)_{efetivo}$, quando o escoamento for turbulento.

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.1) é o termo transiente e representa a dependência da variável dependente em relação ao tempo. Os outros termos, ainda do lado esquerdo da equação, representam o balanço convectivo da variável f . Os primeiros termos do lado direito representam o balanço dos fluxos difusivos, enquanto que o termo fonte é responsável por acomodar todos aqueles termos que não se encaixam na forma apresentada na equação (2.1). O termo fonte contém o gradiente de pressão, quando f for as componentes do vetor velocidade.

A equação (2.1) pode também ser escrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}f) + \text{div}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{v}}f) = \text{div}(\Gamma \cdot \text{grad}f) + S \quad (2.2)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}f) + \text{div}(\bar{\mathbf{J}}) = S \quad (2.3)$$

onde, $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{r}\bar{\mathbf{v}}f - \Gamma \cdot \text{grad}f$ representa o fluxo total (convectivo mais difusivo) da variável f .

A formulação do método FLEX é construída a partir de situações unidimensionais em regime permanente e posteriormente estendida a situações bidimensionais transientes ou não.

2.1.1. Método de solução para difusão pura

2.1.1.1. Difusão unidimensional

A equação de governo para processos de difusão unidimensional em regime permanente é:

$$\frac{dJ}{dX} = S \quad (2.4)$$

onde, J é o fluxo dado por:

$$J = -\Gamma \cdot \frac{df}{dX} \quad (2.5)$$

A forma discreta da equação de governo é obtida pela integração da equação (2.1) sobre um volume de controle adotando-se a hipótese de que os fluxos são constantes em cada face do volume de controle.

Observando a figura 2.1, a equação de discretização para o volume de controle ao redor do ponto i pode ser escrita como,

$$J_{i+1} - J_i = S \cdot \Delta X_i \quad (2.6)$$

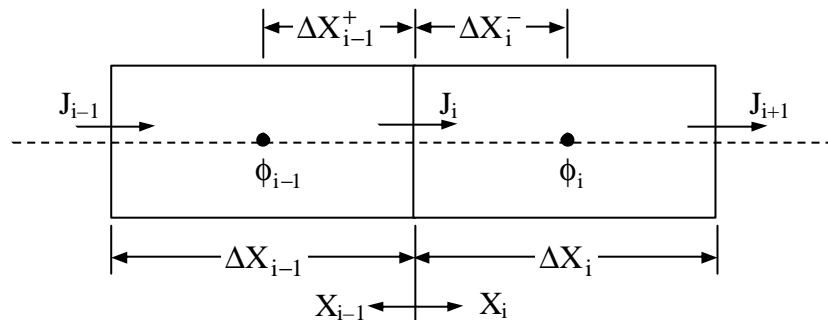


Figura 2.1 – Um típico volume de controle unidimensional mostrando as posições de J .

A equação (2.6) envolve os fluxos nas faces do volume de controle. Para obter uma equação envolvendo a variável dependente f , os fluxos precisam ser expressos em termos dos valores de f nos pontos da malha.

Se admitirmos que o fluxo ao longo de um volume de controle pode ser representado por:

$$J = A \cdot X \cdot e^{\left(\frac{X}{\Delta X}\right)} + B \quad (2.7)$$

onde, X é a variável independente local variando de $0 \leq X \leq \Delta X_i$, sendo,

$$A_i = \frac{J_{i+1} - J_i}{\Delta X_i \cdot e^1} \text{ e } B_i = J_i$$

Uma expressão para f pode ser obtida pela combinação das equações (2.5) e (2.7):

$$-\Gamma_i \cdot \frac{df}{dX_i} = A_i \cdot X_i \cdot e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} + B_i \quad (2.8)$$

Esta é a equação diferencial ordinária que será a geratriz do perfil interpolante para o novo esquema de discretização. Sua solução para Γ_i constante no volume de controle i é:

$$f = -\frac{A_i}{\Gamma_i} \cdot \left[e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} \cdot (X_i \cdot \Delta X_i - \Delta X_i^2) \right] - \frac{B_i}{\Gamma_i} \cdot X_i + C_i \quad (2.9)$$

Adotando que o ponto da malha encontra-se no centro do volume de controle, para

$f\left(X_i = \frac{\Delta X_i}{2}\right) = f_i$ e a equação (2.9) torna-se:

$$f = f_i - A_i \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \left[e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} \cdot (X_i - \Delta X_i) + \frac{1}{2} \cdot \Delta X_i \right] - \frac{B_i}{\Gamma_i} \left(X_i - \frac{\Delta X_i}{2} \right) \quad (2.10)$$

Adotando o mesmo procedimento para o volume de controle $(i-1)$, obtém-se com um referencial X_{i-1} no sentido contrário de X_i , conforme pode ser visto na figura 2.1:

$$f = f_{i-1} - A_{i-1} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \left[e^{\left(\frac{X_{i-1}}{\Delta X_{i-1}}\right)} \cdot (X_{i-1} - \Delta X_{i-1}) + \frac{1}{2} \cdot \Delta X_{i-1} \right] - \frac{B_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \left(X_{i-1} - \frac{\Delta X_{i-1}}{2} \right) \quad (2.11)$$

onde, X_{i-1} é a variável independente local variando de $0 \leq X_{i-1} \leq \Delta X_{i-1}$, sendo,

$$A_{i-1} = \frac{J_i - J_{i-1}}{\Delta X_{i-1} \cdot e^1} \text{ e } B_i = -J_{i-1}$$

As equações (2.10) e (2.11) representam a variação de f dentro de um volume de controle.

Essas equações na interface entre os volumes de controle i e $i-1$ tornam-se:

$$f(X_i = 0) = f_i + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_i \cdot \Delta X_i}{\Gamma_i} - \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 2}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_{i+1} \cdot \Delta X_i}{\Gamma_i} \quad (2.12)$$

e,

$$f(X_{i-1} = 0) = f_{i-1} - \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_i \cdot \Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 2}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_{i-1} \cdot \Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \quad (2.13)$$

Para dois volumes de controle adjacentes, os perfis de f são tais que eles possuem o mesmo fluxo na interface comum. Além disso, precisam também possuir um único valor de f na interface comum. Essa condição de continuidade de f , ou seja, $f(X_{i-1} = 0) = f(X_i = 0)$, pode ser expressa usando (2.12) e (2.13) como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right) \cdot J_i = \left(\frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \cdot (J_i - J_{i+1}) + \left(\frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \cdot (J_i - J_{i-1}) + (f_{i-1} - f_i) \quad (2.14)$$

E assim a expressão para os fluxos J_i pode ser arranjada como:

$$J_i = J_{\text{hat}}_i + D J_i \cdot (f_{i-1} - f_i) \quad (2.15)$$

onde,

$$J_{\text{hat}}_i = B J_i \cdot (J_i - J_{i+1}) + C J_i \cdot (J_i - J_{i-1}) \quad (2.16)$$

sendo,

$$DJ_i = \frac{2}{\left(\frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right)} \quad (2.17a)$$

$$BJ_i = \left(\frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \cdot DJ_i \quad (2.17b)$$

$$CJ_i = \left(\frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \cdot DJ_i \quad (2.17c)$$

A equação de discretização para \mathbf{f} é obtida pela substituição dos fluxos na equação (2.6) pela expressão tal como a equação (2.15). Portanto,

$$[\text{Jhat}_{i+1} + DJ_{i+1} \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1})] - [\text{Jhat}_i + DJ_i \cdot (\mathbf{f}_{i-1} - \mathbf{f}_i)] = S \cdot \Delta X_i \quad (2.18)$$

O termo fonte S é linearizado como segue.

$$S = S_c + S_p \cdot \mathbf{f}_i \quad (2.19)$$

Onde S_c é a parte constante e S_p a parte função da variável \mathbf{f}_i .

As equações (2.18) e (2.19) podem ser combinadas e reescritas para formarem a seguinte equação de discretização para \mathbf{f} :

$$AP_i \cdot \mathbf{f}_i = AIP_i \cdot \mathbf{f}_{i+1} + AIM_i \cdot \mathbf{f}_{i-1} + CON_i \quad (2.20)$$

onde,

$$AIP_i = DJ_{i+1} \quad (2.21a)$$

$$AIM_i = DJ_i \quad (2.21b)$$

$$AP_i = AIP_i + AIM_i - Sp_i \cdot \Delta X_i \quad (2.21c)$$

$$CON_i = (Jhat_i - Jhat_{i+1}) + Sc_i \cdot \Delta X_i \quad (2.21d)$$

Equações de fronteiras

As equações (2.12) e (2.13) quando aplicadas nos volumes de controle das fronteiras fornecem relações entre os valores de f e dos fluxos J nesses volumes de controle. Assim, da equação (2.12), para $i = 2$, $f(X_i = 0) = f_1$, então:

$$f_1 = f_2 + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot (J_2 - J_3) \quad (2.22)$$

e da equação (2.13), para $i = n$, $f(X_{i-1} = 0) = f_n$, logo:

$$f_n = f_{n-1} - \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_{n-1}}{\Gamma_{n-1}} \cdot (J_n - J_{n-1}) \quad (2.23)$$

onde, $\mathbf{1}$ e \mathbf{n} denotam as fronteiras à esquerda e à direita, respectivamente.

Tratamento das condições de contorno na difusão pura

Condição de contorno de 1ª espécie (Dirichlet)

Esta condição de contorno é empregada quando se conhece a variável f nas fronteiras e não apresenta dificuldades na sua implementação.

Condição de contorno de 2ª espécie (Neumann)

Se o fluxo no contorno é conhecido, o valor da variável dependente f pode ser calculado.

A forma de se determinar o valor de f na fronteira, como sugere Oliveira (1997), é:

- Admitir inicialmente a condição de Dirichlet, adotando valores arbitrários no contorno;
- Ao final de cada iteração, corrigir a fronteira com as informações obtidas do interior do domínio usando para tal as equações (2.22) e (2.23).

Se, por exemplo, conhecemos o fluxo J em $X = 0$ e,

$$J_2 = q_2''$$

então a equação (2.22) torna-se:

$$f_1 = f_2^o + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot (q_2'' - J_3^o)$$

onde f_2^o e J_3^o são oriundos da iteração anterior.

O mesmo tratamento pode ser feito para obter o valor o valor de f na fronteira direita.

Condição de contorno de 3ª espécie (Robin)

Se a relação entre a variável dependente e seu fluxo, como na condição de contorno convectiva, é conhecida no contorno, esta relação constitui uma equação auxiliar que juntamente com as equações (2.22) e/ou (2.23) que possibilita o cálculo de f e J naquele contorno. O procedimento de cálculo é semelhante ao proposto para a condição de Neumann.

Solução das equações algébricas

A equação (2.20) é uma equação algébrica válida para um ponto i da malha do domínio de cálculo. É conveniente escrever esta equação numa forma diferente para esclarecer o algoritmo usado na solução desta. Se os pontos da malha no domínio de cálculo são numerados de 1, 2, 3, ..., n em que os pontos 1 e n denotam os contornos, a equação (2.20) pode ser escrita como:

$$a_i \cdot f_i = b_i \cdot f_{i+1} + c_i \cdot f_{i-1} - d_i \tag{2.24}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Nas fronteiras, os termos c_1 e b_n são iguais a zero. Assim, para $i = 1$,

$$a_1 \cdot f_1 = b_1 \cdot f_2 + d_1 \quad (2.25)$$

Essa condição implica que f_1 é conhecida em função de f_2 . A equação para $i = 2$ é uma relação entre f_1 , f_2 e f_3 . Mas, uma vez que f_1 pode ser expresso em termos de f_2 , essa relação se reduz à relação entre f_2 e f_3 . Esse processo de substituição pode ser continuado até f_n . Isso nos permite iniciar o processo de retro-substituição na qual f_{n-1} é obtido de f_n , f_{n-2} de f_{n-1} , ..., f_2 de f_3 e f_1 de f_2 . Esse processo de eliminação é chamado de TDMA (Tri-Diagonal-Matrix-Algorithm).

Em geral,

$$f_i = P_i \cdot f_{i+1} + Q_i \quad (2.26)$$

onde, P_i e Q_i podem ser encontrados pela substituição da equação (2.26), pela substituição de i por $i-1$ dentro da equação (2.24).

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i \cdot P_{i-1}} \quad (2.27)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i \cdot Q_{i-1}}{a_i - c_i \cdot P_{i-1}} \quad (2.28)$$

Para $i = 1$, os valores de P_1 e Q_1 são dados por

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{e} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (2.29)$$

Para $i = n$, com $b_n = 0$, nos leva a $P_n = 0$, e da equação (2.26) temos:

$$f_n = Q_n$$

Algoritmo

1. Calcule P_1 e Q_1 da equação (2.29);
2. Use as relações (2.27) e (2.28) para obter P_i e Q_i para $i = 1, 2, \dots, n$;
3. Faça $f_n = Q_n$;
4. Use a equação (2.26) para $i = n - 1, n - 2, \dots, 3, 2, 1$.

Para situação unidimensional com propriedades constantes, o procedimento TDMA resolve o conjunto de equações algébricas lineares de uma só vez. Para equações não lineares, isto é, $\Gamma = \Gamma(\mathbf{f})$, uma solução iterativa tem que ser usada.

2.1.1.2. Difusão bidimensional

Uma situação bidimensional sob regime permanente é descrita na figura 2.2. A forma diferencial da equação de governo é:

$$\frac{\partial J_x}{\partial X} + \frac{\partial J_y}{\partial Y} = S \quad (2.30)$$

onde,

$$J_x = -\Gamma \cdot \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

$$J_y = -\Gamma \cdot \frac{\partial \phi}{\partial Y}$$

Integrando-se a equação (2.30) sobre o volume de controle em torno do ponto (i, j) obtém-se:

$$\begin{aligned} (J_{x_{i+1,j}} - J_{x_{i,j}}) \cdot \Delta Y_j + (J_{y_{i,j+1}} - J_{y_{i,j}}) \cdot \Delta X_i = S_{c_{i,j}} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j + \\ S_{p_{i,j}} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \cdot \phi_{i,j} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Os fluxos na equação (2.31) são dados por expressões similares àquela definida pela equação (2.21), escritas para as direções coordenadas apropriadas. A equação de discretização resultante é:

$$\begin{aligned} AP_{i,j} \cdot \phi_{i,j} = & AIP_{i,j} \cdot \phi_{i+1,j} + AIM_{i,j} \cdot \phi_{i-1,j} + \\ & AJP_{i,j} \cdot \phi_{i,j+1} + AJM_{i,j} \cdot \phi_{i,j-1} + CON_{i,j} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde os coeficientes são definidos como segue:

$$AIP_{i,j} = DJx_{i+1,j} \cdot \Delta Y_j \quad (2.33a)$$

$$AIM_{i,j} = DJx_{i,j} \cdot \Delta Y_j \quad (2.33b)$$

$$AJP_{i,j} = DJy_{i,j+1} \cdot \Delta X_i \quad (2.33c)$$

$$AJM_{i,j} = DJy_{i,j} \cdot \Delta X_i \quad (2.33d)$$

$$AP_{i,j} = AIP_{i,j} + AIM_{i,j} + AJP_{i,j} + AJM_{i,j} - Sp_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (2.33e)$$

$$\begin{aligned} CON_{i,j} = & \left(\hat{J}x_{i,j} - \hat{J}x_{i+1,j} \right) \cdot \Delta y_j + \\ & \left(\hat{J}y_{i,j} - \hat{J}y_{i,j+1} \right) \cdot \Delta X_i + Sc_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \end{aligned} \quad (2.33f)$$

As definições das várias quantidades nas equações (2.33a)-(2.33f) são similares àsquelas dadas nas equações (2.20), (2.21a)-(2.21d) para uma situação unidimensional, exceto que os subscritos x e y foram adicionados para indicar a direção coordenada apropriada.

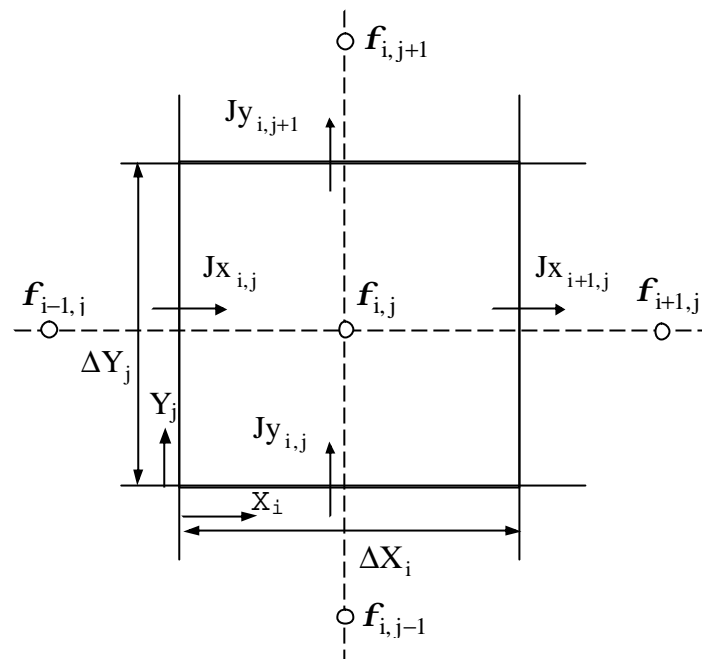


Figura 2.2 – Volume de controle bidimensional e seus parâmetros.

Solução do método

Uma situação bidimensional é definida pelas três variáveis $f_{i,j}$, $J_{x_{i,j}}$ e $J_{y_{i,j}}$. Essas variáveis são governadas pelo seguinte conjunto de equações:

- ✓ Equação de conservação para f
- ✓ Condição de continuidade Spline na direção x
- ✓ Condição de continuidade Spline na direção y

Esse conjunto de equações acopladas é resolvido iterativamente. Inicialmente, os termos f são “chutados” e os termos J são estabelecidos iguais a zero. O resultado da equação de f neste ponto é idêntico ao resultado da formulação de diferença central e pode ser facilmente resolvido. Essa distribuição de f é então usada para calcular os fluxos J e J_{hat} .

Alguns problemas testes foram utilizados para verificar a precisão do método FLEX e comparados com os resultados do método de Diferenças Centrais e do método Flux-Spline. Esses problemas podem ser vistos no Capítulo 4.

2.1.2. Método de solução para convecção-difusão

2.1.2.1. Convecção-difusão unidimensional

A forma unidimensional, sob regime permanente, da equação de convecção-difusão é:

$$\frac{dJ}{dX} = S \quad (2.34)$$

onde o fluxo total J da variável dependente f é dado por:

$$J = ru f - \Gamma \cdot \frac{\partial f}{\partial X} \quad (2.35)$$

Os fluxos mássicos ru , assim como os fluxos totais J , serão posicionados nas faces do volume de controle, assumindo-se valores médios ao longo das mesmas.

Para obter a variação de f dentro de um volume de controle, uma suposição para J é necessária. Os métodos de baixa ordem, tal como o esquema exponencial (POWER-LAW), assumem que o fluxo total é constante entre dois pontos da malha. Tal suposição nos leva a um perfil linear de f em problemas de difusão pura e a um perfil exponencial em problemas de convecção-difusão.

Novamente, assumindo-se que o fluxo J pode variar exponencialmente dentro de um volume de controle i ,

$$J = A \cdot X \cdot e^{\left(\frac{X}{\Delta X}\right)} + B \quad (2.36)$$

onde, $0 \leq X \leq \Delta X_i$, sendo,

$$A_i = \frac{J_{i+1} - J_i}{\Delta X_i \cdot e^1} \text{ e } B_i = J_i$$

Uma expressão para f pode ser obtida pela combinação das equações (2.35) e (2.36):

$$ru f - \Gamma_i \cdot \frac{df}{dX_i} = A_i \cdot X_i \cdot e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} + B_i \quad (2.37)$$

O coeficiente de difusão é comumente assumido para ser constante sobre o volume de controle.

O termo ru , responsável pelo transporte convectivo, pode variar dentro do volume de controle, mas isso leva à soluções para f envolvendo funções erro, séries infinitas, etc. Por conveniência algébrica, ru foi considerado como constante na solução da equação (2.37).

A figura 2.3 mostra os parâmetros J , f e ru em cada volume de controle.

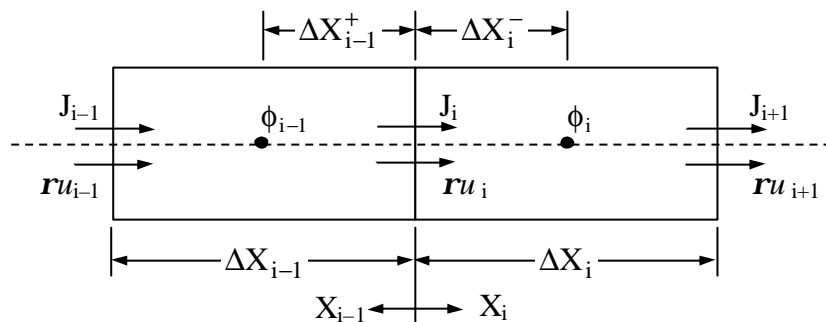


Figura 2.3 – Volumes de Controle para cálculo de convecção-difusão.

A figura 2.4 mostra como ficam as distribuições de J e ru ao longo dos volumes de controle numa determinada direção.

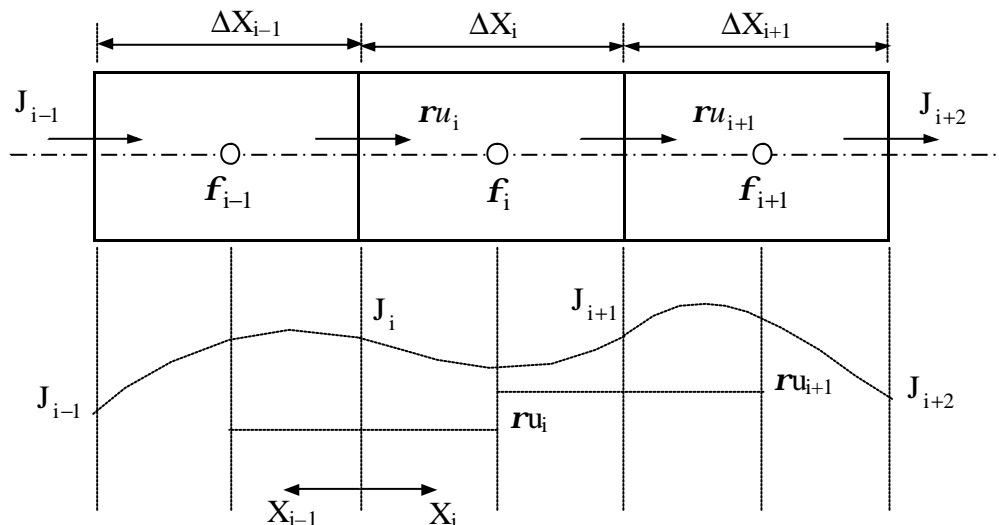


Figura 2.4 – Distribuição de J e ru ao longo do domínio X .

Desta maneira, a equação (2.37) pode ser colocada na forma:

$$\frac{df}{dX_i} + \left(-\frac{ru}{\Gamma_i} \right) \cdot f = -\frac{A_i}{\Gamma_i} \cdot X_i \cdot e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i} \right)} - \frac{B_i}{\Gamma_i} \quad (2.38)$$

Com a condição de contorno $f\left(X_i = \frac{\Delta X_i}{2}\right) = f_i$ a solução analítica diferencial linear de 1ª ordem não homogênea (2.38) é:

$$\begin{aligned} f \cdot e^{\frac{ru_i \cdot X_i}{\Gamma_i}} = f_i \cdot e^{-P_i^-} - \frac{A_i}{\Gamma_i} \left[\left(\frac{X_i}{d_i} e^{d_i X_i} - \frac{e^{d_i X_i}}{d_i^2} \right) - \left(\frac{\Delta X_i^-}{d_i} e^{d_i \Delta X_i^-} - \frac{e^{d_i \Delta X_i^-}}{d_i^2} \right) \right] \\ + \frac{B_i}{ru_i} \left(e^{\frac{ru_i \cdot X_i}{\Gamma_i}} - e^{-P_i^-} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde, $0 \leq X_i \leq \Delta X_i$.

Adotando o mesmo procedimento para o volume de controle (i-1), obtém-se com um referencial X_{i-1} no sentido contrário de X_i , conforme pode ser visto na figura 2.3:

$$\begin{aligned} f \cdot e^{\frac{ru_i \cdot X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}}} = f_i \cdot e^{P_{i-1}^+} - \frac{A_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \left[\left(\frac{X_{i-1}}{d_{i-1}} e^{d_{i-1} X_{i-1}} - \frac{e^{d_{i-1} X_{i-1}}}{d_{i-1}^2} \right) - \left(\frac{\Delta X_{i-1}^+}{d_{i-1}} e^{d_{i-1} \Delta X_{i-1}^+} - \frac{e^{d_{i-1} \Delta X_{i-1}^+}}{d_{i-1}^2} \right) \right] \\ - \frac{B_{i-1}}{ru_i} \left(e^{\frac{ru_i \cdot X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}}} - e^{P_{i-1}^+} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde, $0 \leq X \leq \Delta X_{i-1}$, sendo,

$$d_i = -\frac{ru_i}{\Gamma_i} + \frac{1}{\Delta X_i} \quad \text{e} \quad d_{i-1} = \frac{ru_i}{\Gamma_{i-1}} + \frac{1}{\Delta X_{i-1}}$$

As equações (2.39) e (2.40) fornecem a variação de f dentro de um volume de controle como uma função de x . Essas equações na interface entre os volumes de controle i e $i+1$ tornam-se:

$$\begin{aligned} f(X_i=0) = f_i \cdot e^{-P_i^-} + \frac{1}{A(-P_i^-)} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot J_i - \\ \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Delta X_i} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot G(P_{mi}^-) \cdot (J_i - J_{i+1}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

e,

$$\begin{aligned} f(X_{i-1}=0) = f_{i-1} \cdot e^{P_{i-1}^+} - \frac{1}{A(P_{i-1}^+)} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot J_i + \\ \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Delta X_{i-1}} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot G(P_{mi-1}^+) \cdot (J_i - J_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde,

$$P_{i-1}^+ = ru_i \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \quad (2.43)$$

$$P_i^- = ru_i \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \quad (2.44)$$

$$P_{mi-1}^+ = ru_i \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} + \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Delta X_{i-1}} \quad (2.45)$$

$$P_{mi}^- = ru_i \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} + \frac{\Delta X_i^-}{\Delta X_i} \quad (2.46)$$

$$A(P) = \frac{P}{e^P - 1} \quad (2.47)$$

$$G(P) = \frac{e^P \cdot (P-1) + 1}{P^2} \quad (2.48)$$

O produto das funções $A(P)$ e $G(P)$ fornece a função que Hsu(1981) chama de $Q(P)$. Assim:

$$Q(P) = A(P) \cdot G(P)$$

$$Q(P) = \frac{e^P \cdot (P-1) + 1}{P \cdot (e^P - 1)} \quad (2.49)$$

que possui as propriedades:

$$Q(-P) = 1 - Q(P)$$

$$Q(P)_{P \rightarrow +\infty} = 1 \quad A(P)_{P \rightarrow +\infty} = 0$$

$$Q(P)_{P \rightarrow -\infty} = 0 \quad A(P)_{P \rightarrow -\infty} = +\infty$$

$$Q(P)_{P \rightarrow 0} = 1/2 \quad A(P)_{P \rightarrow 0} = 1$$

De agora em diante serão usadas as funções $A(P)$ e $Q(P)$. Para situações bidimensionais convectivas é necessário permitir que o fluxo de massa varie no volume de controle. Para corrigir a hipótese de fluxo constante, um termo extra será adicionado nas equações (2.40) e (2.41). A escolha da forma do termo adicional é tal que a equação de governo será satisfeita para o caso onde f é constante e ru varia linearmente. Então, as equações “calibradas” tornam-se:

$$\begin{aligned} f(X_i = 0) = & f_i \cdot e^{-P_i^-} + \frac{1}{A(-P_i^-)} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot J_i - \\ & \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Delta X_i} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \frac{Q(P_{mi}^-)}{A(P_{mi}^-)} \cdot \{(J_i - J_{i+1}) + (ru_{i+1} - ru_i) \cdot f_i\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

e,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(X_{i-1} = 0) = \mathbf{f}_{i-1} \cdot e^{P_{i-1}^+} - \frac{1}{A(P_{i-1}^+)} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot J_i + \\
 \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Delta X_{i-1}} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \frac{Q(P_{mi-1}^+)}{A(P_{mi-1}^+)} \cdot \{(J_i - J_{i-1}) + (ru_{i-1} - ru_i) \cdot \mathbf{f}_{i-1}\}
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

A figura (2.5) apresenta o comportamento das funções A(P) e Q(P).

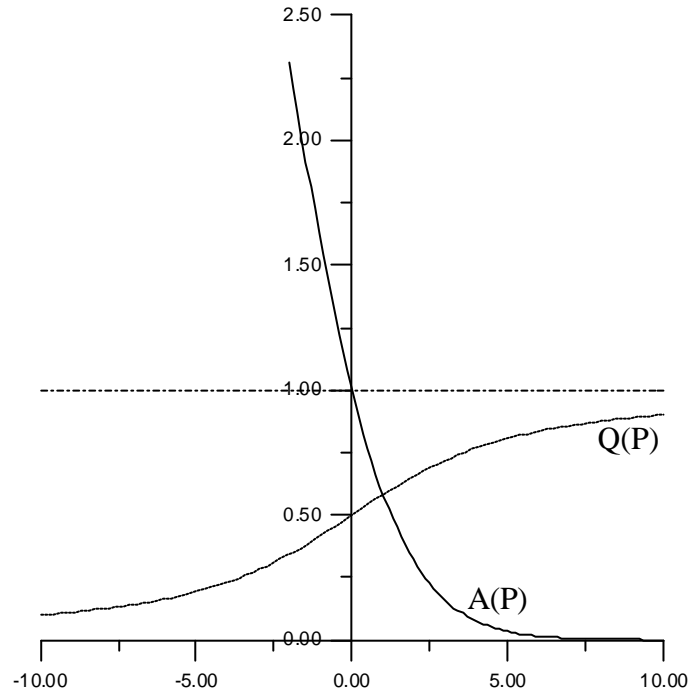


Figura 2.5 – Comportamento das funções A(P) e Q(P).

Para dois volumes de controle adjacentes, os perfis de \mathbf{f} são tais que eles possuem o mesmo fluxo na interface comum. Além disso, precisam também possuir um único valor de \mathbf{f} na interface comum. Impondo-se a condição de continuidade de \mathbf{f} , ou seja $\mathbf{f}(X_{i-1} = 0) = \mathbf{f}(X_i = 0)$, obtém-se a expressão para os fluxos J:

$$J_i = J_{\text{hat}}_i + DJ_i \cdot \left\{ \mathbf{f}_{i-1} \cdot e^{P_{i-1}^+} - \mathbf{f}_i \cdot e^{-P_i^-} \right\}
 \tag{2.52}$$

onde,

$$\begin{aligned} \text{Jhat}_i = & \text{BJ}_i \cdot \left\{ (\text{J}_i - \text{J}_{i+1}) + (\mathbf{ru}_{i+1} - \mathbf{ru}_i) \cdot \mathbf{f}_i \right\} + \\ & \text{CJ}_i \cdot \left\{ (\text{J}_i - \text{J}_{i-1}) + (\mathbf{ru}_{i-1} - \mathbf{ru}_i) \cdot \mathbf{f}_{i-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

e,

$$\text{DJ}_i = \left(\frac{1}{\text{A}(-\text{P}_i^-)} \cdot \frac{\Delta \text{X}_i^-}{\Gamma_i} + \frac{1}{\text{A}(\text{P}_{i-1}^+)} \cdot \frac{\Delta \text{X}_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \right)^{-1} \quad (2.54a)$$

$$\text{BJ}_i = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta \text{X}_i^-}{\Delta \text{X}_i} \cdot \frac{\Delta \text{X}_i^-}{\Gamma_i} \cdot \frac{\text{Q}(\text{P}_{m_i}^-)}{\text{A}(\text{P}_{m_i}^-)} \cdot \text{DJ}_i \quad (2.54b)$$

$$\text{CJ}_i = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta \text{X}_{i-1}^+}{\Delta \text{X}_{i-1}} \cdot \frac{\Delta \text{X}_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \frac{\text{Q}(\text{P}_{m_{i-1}}^+)}{\text{A}(\text{P}_{m_{i-1}}^+)} \cdot \text{DJ}_i \quad (2.54c)$$

Integrando a equação de conservação (2.34) sobre o volume de controle em torno de \mathbf{f}_i , como mostrado na figura 2.3, e usando um termo fonte linearizado, obtém-se:

$$(\text{J}_{i+1} - \text{J}_i) = \text{Sc}_i \cdot \Delta \text{X}_i + \text{Sp}_i \cdot \Delta \text{X}_i \cdot \mathbf{f}_i \quad (2.55)$$

A equação de discretização para \mathbf{f} é obtida pela substituição dos fluxos dados pela equação (2.52) na equação (2.55). Desta forma obtém-se:

$$[\text{Jhat}_{i+1} + \text{DJ}_{i+1} \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1})] - [\text{Jhat}_i + \text{DJ}_i \cdot (\mathbf{f}_{i-1} - \mathbf{f}_i)] = \text{Sc}_i \cdot \Delta \text{X}_i + \text{Sp}_i \cdot \Delta \text{X}_i \cdot \mathbf{f} \quad (2.56)$$

A equação (2.56) pode ser reescrita para fornecer a seguinte equação de discretização para \mathbf{f} :

$$\text{AP}_i \cdot \mathbf{f}_i = \text{AIP}_i \cdot \mathbf{f}_{i+1} + \text{AIM}_i \cdot \mathbf{f}_{i-1} + \text{CON}_i \quad (2.57)$$

onde,

$$\text{AIP}_i = \text{DJ}_{i+1} \cdot \exp(-\text{P}_i^-) \quad (2.58a)$$

$$AIM_i = DJ_i \cdot \exp(P_{i-1}^+) \quad (2.58b)$$

$$AP_i = AIP_i + AIM_i - Sp_i \cdot \Delta X_i \quad (2.58c)$$

$$CON_i = Sc_i \cdot \Delta X_i + (Jhat_i - Jhat_{i+1}) \quad (2.58d)$$

O domínio de validade da equação algébrica para J_i e para f podem ser estendidas usando o mesmo artifício aplicado para difusão pura, isto é, imaginando um volume de controle de dimensão nula no contorno.

2.1.2.2. Convecção-difusão bidimensional

A expansão do esquema para uma situação bidimensional se fará como na difusão pura. Os parâmetros geométricos são definidos de forma semelhante à convecção unidimensional.

Os valores dos fluxos J_x , J_y , ru e rv são armazenados ao longo das faces dos volumes de controle, como mostrado na figura 2.6, sendo as expressões para J_x e J_y geradas a partir daquela deduzida para o caso unidimensional.

Assim, para a direção X, obtém-se:

$$J_{x_{i,j}} = Jhat_{x_{i,j}} + DJ_{x_{i,j}} \cdot \left\{ f_{i-1,j} \cdot e^{Px_{i-1,j}^+} - f_{i,j} \cdot e^{-Px_{i,j}^-} \right\} \quad (2.59)$$

onde,

$$Jhat_{x_{i,j}} = BJ_{x_{i,j}} \cdot \left\{ (J_{x_{i,j}} - J_{x_{i+1,j}}) + (ru_{i+1,j} - ru_{i,j}) \cdot f_{i,j} \right\} + CJ_{x_{i,j}} \cdot \left\{ (J_{x_{i,j}} - J_{x_{i-1,j}}) + (ru_{i-1,j} - ru_{i,j}) \cdot f_{i-1,j} \right\} \quad (2.60)$$

e,

$$DJ_{x_{i,j}} = \left(\frac{1}{A(-Px_{i,j}^-)} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} + \frac{1}{A(Px_{i-1,j}^+)} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1,j}} \right)^{-1} \quad (2.61a)$$

$$BJ_{X_{i,j}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Delta X_i} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{Q(P_{X_{mi,j}}^-)}{A(P_{X_{mi,j}}^-)} \cdot DJ_{X_{i,j}} \quad (2.61b)$$

$$CJ_{X_{i,j}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Delta X_{i-1}} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1,j}} \cdot \frac{Q(P_{X_{mi-1,j}}^+)}{A(P_{X_{mi-1,j}}^+)} \cdot DJ_{X_{i,j}} \quad (2.61c)$$

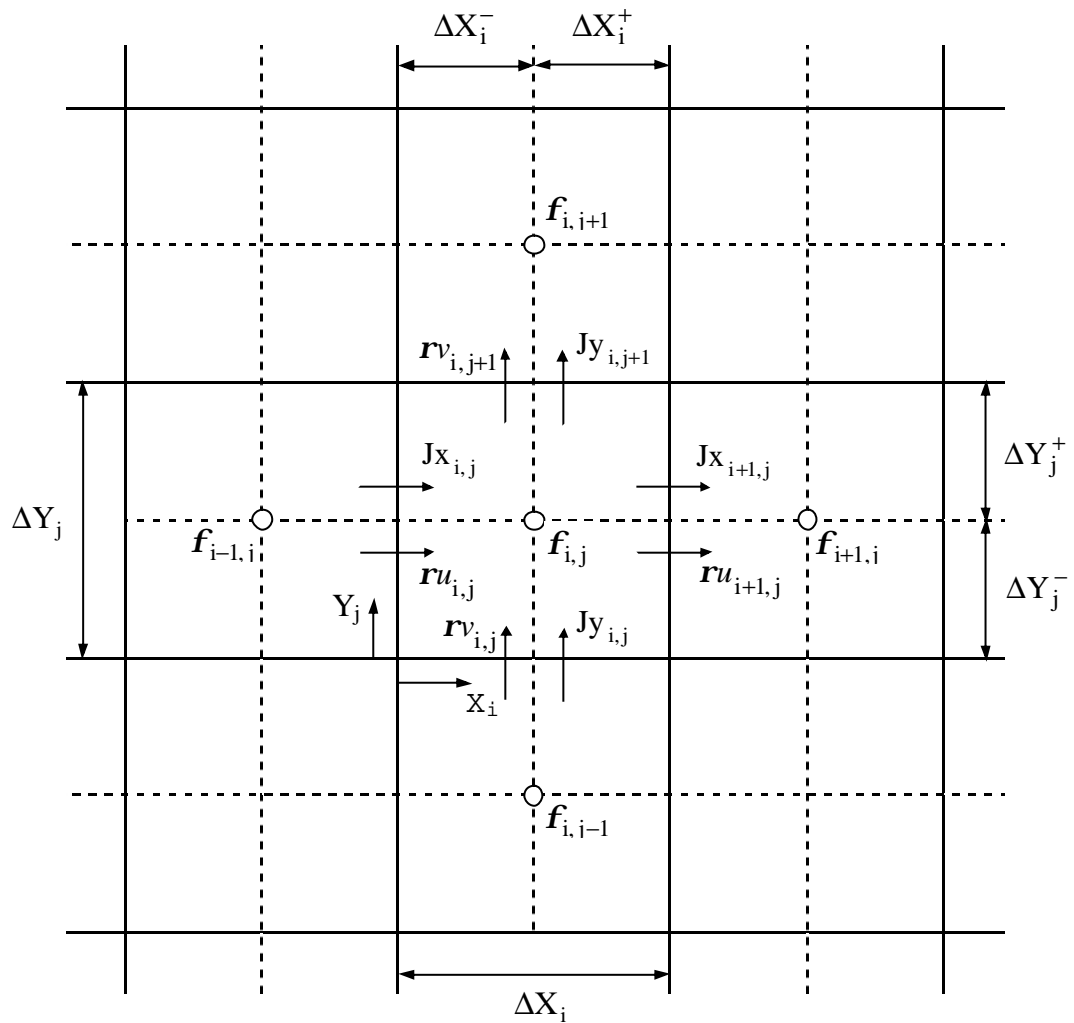


Figura 2.6 – Volume de controle bidimensional e seus parâmetros.

sendo,

$$P_{X_{i-1,j}}^+ = ru_{i,j} \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1,j}} \quad (2.62)$$

$$P_{X_{i,j}^-} = \mathbf{r}u_{i,j} \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} \quad (2.63)$$

$$P_{X_{mi-1,j}^+} = \mathbf{r}u_{i,j} \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1,j}} + \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Delta X_{i-1}} \quad (2.64)$$

$$P_{X_{mi,j}^-} = \mathbf{r}u_{i,j} \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} + \frac{\Delta X_i^-}{\Delta X_i} \quad (2.65)$$

Na direção Y, obtém-se:

$$J_{y_{i,j}} = \text{Jhaty}_{i,j} + \text{DJy}_{i,j} \cdot \left\{ \mathbf{f}_{i,j-1} \cdot e^{Py_{i,j-1}^+} - \mathbf{f}_{i,j} \cdot e^{-Py_{i,j}^-} \right\} \quad (2.66)$$

onde,

$$\begin{aligned} \text{Jhaty}_{i,j} = & \text{BJy}_{i,j} \cdot \left\{ (\text{Jy}_{i,j} - \text{Jy}_{i,j+1}) + (\mathbf{r}v_{i,j+1} - \mathbf{r}v_{i,j}) \cdot \mathbf{f}_i \right\} + \\ & \text{CJy}_{i,j} \cdot \left\{ (\text{Jy}_{i,j} - \text{Jy}_{i,j-1}) + (\mathbf{r}v_{i,j-1} - \mathbf{r}v_{i,j}) \cdot \mathbf{f}_{i,j-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

e,

$$\text{DJy}_{i,j} = \left(\frac{1}{A(-P_{i,j}^-)} \cdot \frac{\Delta Y_j^-}{\Gamma_{i,j}} + \frac{1}{A(P_{i,j-1}^+)} \cdot \frac{\Delta Y_{j-1}^+}{\Gamma_{i,j-1}} \right)^{-1} \quad (2.68a)$$

$$\text{BJy}_{i,j} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta Y_j^-}{\Delta Y_j} \cdot \frac{\Delta Y_j^-}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{Q(P_{mi,j}^-)}{A(P_{mi,j}^-)} \cdot \text{DJ}_{i,j} \quad (2.68b)$$

$$\text{CJy}_{i,j} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta Y_{j-1}^+}{\Delta Y_{j-1}} \cdot \frac{\Delta Y_{j-1}^+}{\Gamma_{i,j-1}} \cdot \frac{Q(P_{mi,j-1}^+)}{A(P_{mi,j-1}^+)} \cdot \text{DJ}_{i,j} \quad (2.68c)$$

Para uma situação bidimensional em regime permanente, como mostrado na figura 2.6, a equação de conservação integrada para o volume de controle em torno do ponto (i, j) é:

$$(Jx_{i+1,j} - Jx_{i,j}) \cdot \Delta Y_j + (Jy_{i,j+1} - Jy_{i,j}) \cdot \Delta X_i = Sc_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j + Sp_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \cdot f_{i,j} \quad (2.69)$$

A expressão final para f é:

$$AP_{i,j} \cdot f_{i,j} = AIP_{i,j} \cdot f_{i+1,j} + AIM_{i,j} \cdot f_{i-1,j} + AJP_{i,j} \cdot f_{i,j+1} + AJM_{i,j} \cdot f_{i,j-1} + CON_{i,j} \quad (2.70)$$

onde,

$$AIP_{i,j} = DJx_{i+1,j} \cdot e^{-Px_{i+1,j}^-} \cdot \Delta Y_j \quad (2.71a)$$

$$AIM_{i,j} = DJx_{i,j} \cdot e^{Px_{i-1,j}^+} \cdot \Delta Y_j \quad (2.71b)$$

$$AJP_{i,j} = DJy_{i,j+1} \cdot e^{-Py_{i,j+1}^-} \cdot \Delta X_i \quad (2.71c)$$

$$AJM_{i,j} = DJy_{i,j} \cdot e^{Py_{i,j-1}^+} \cdot \Delta X_i \quad (2.71d)$$

$$AP_{i,j} = AIP_{i,j} + AIM_{i,j} + AJP_{i,j} + AJM_{i,j} - Sp_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (2.71e)$$

$$CON_{i,j} = (Jhatx_{i,j} - Jhatx_{i+1,j}) \cdot \Delta Y_j + (Jhaty_{i,j} - Jhaty_{i,j+1}) \cdot \Delta X_i + Sc_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (2.71f)$$

O tratamento das condições de contorno e o método de solução são aqueles usados na difusão bidimensional, fornecendo-se a mais, os novos parâmetros geométricos e o campo de velocidades.

Alguns problemas testes foram aplicados para verificar a precisão do método FLEX comparando-o com o esquema exponencial (POWER-LAW). Esses problemas podem ser vistos no CAPÍTULO 3.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO ESQUEMA FLEX

3. APLICAÇÃO DO ESQUEMA FLEX

Neste Capítulo alguns problemas testes foram utilizados para verificar a precisão do esquema de discretização FLEX quando comparado com os resultados dos esquemas de DIFERENÇAS CENTRAIS (na Difusão pura) ou POWER-LAW (na convecção-difusão) e FLUX-SPLINE (convecção-difusão).

3.1. REGIME PERMANENTE

3.1.1. DIFUSÃO PURA

Problema Teste 1

R.E. Phillips e F.W. Schmidt (1984) propuseram um problema teste de difusão pura que tem solução analítica conhecida e contém uma região com grandes gradientes. O fenômeno é governado pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(-\Gamma \frac{\partial f}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\Gamma \frac{\partial f}{\partial Y} \right) = S(X, Y)$$

A solução analítica para este caso é dada por:

$$f(X, Y) = 500e^{-50[(1-X)^2 + Y^2]} + 100(1 - Y)X$$

onde, $0 \leq X \leq 1$ e $0 \leq Y \leq 1$.

O termo fonte correspondente para Γ igual a 1 é:

$$s(X, Y) = 50\,000e^{-50[(1-X)^2 + Y^2]} \cdot \{100[(1 - X)^2 + Y^2] - 2\}$$

As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} f(0, Y) &= 500e^{-50(Y^2+1)} & f(X, 0) &= 100X + 500e^{-50(1-X)^2} \\ f(1, Y) &= 100(1 - Y) + 500e^{-50Y^2} & f(X, 1) &= 500e^{-50[(1-X)^2+1]} \end{aligned}$$

O problema foi resolvido utilizando-se malhas regulares com 16×16 , 32×32 e 64×64 volumes de controle, ou seja, $\Delta = 1/16$, $\Delta = 1/32$ e $\Delta = 1/64$.

A distribuição da variável dependente f , proveniente da solução analítica, é apresentada no gráfico da figura 3.1.

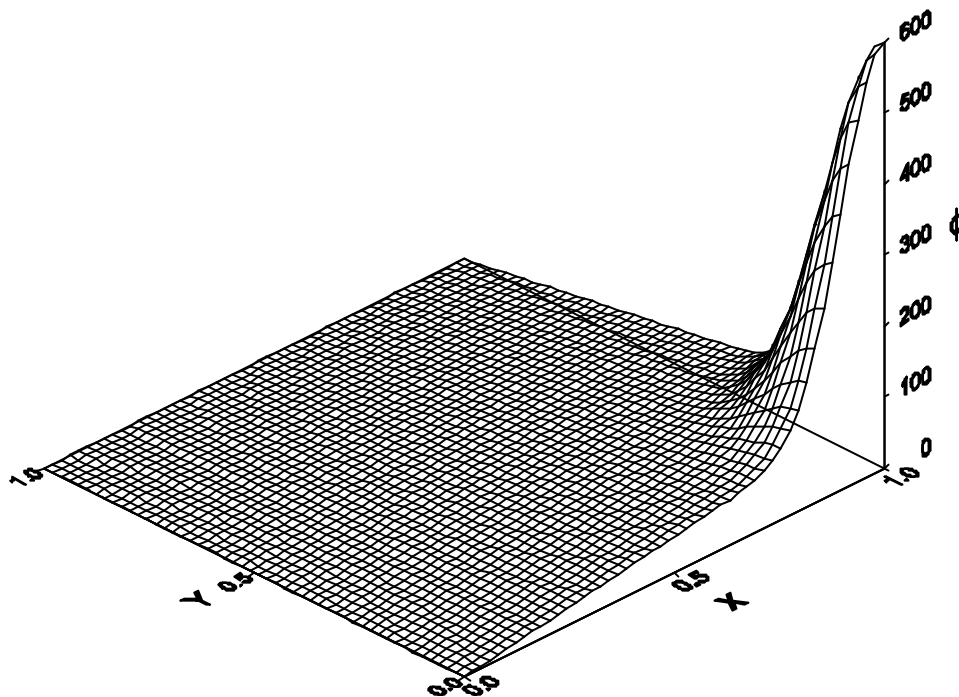


Figura 3.1 – Gráfico tridimensional da solução analítica do problema teste 1.

A figura 3.2 apresenta o gráfico do erro percentual em função da malha, fazendo um comparativo dos esquemas de discretização DIF. CENTRAL, FLUX-SPLINE e FLEX.

O erro com relação à solução analítica é definido pelos autores do trabalho como:

$$\text{Erro percentual } (e) = 100 \cdot \left| \frac{f_{\text{calc}} - f_{\text{exato}}}{f_{\text{exato}}} \right|$$

Como podemos observar na figura 3.2, o esquema FLEX forneceu níveis de erros inferiores aos esquemas de DIF. CENTRAL e FLUX-SPLINE.

Essa superioridade do esquema FLEX se deve ao fato que os fluxos J_x e J_y , obtidos pela derivação da equação que define a solução analítica para f , possuem um perfil similar àquele proposto neste esquema de discretização, ou seja, do mesmo tipo que a equação 2.7.

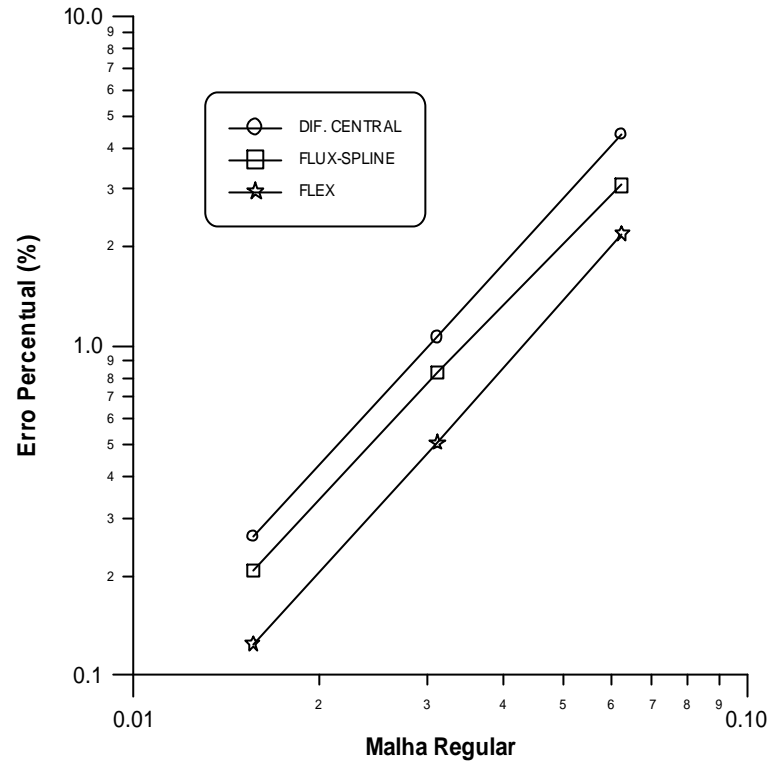


Figura 3.2 – Gráfico do erro percentual para $\Delta = 1/16$, $\Delta = 1/32$ e $\Delta = 1/64$.

Problema Teste 2

Varejão (1979) testou este problema unidimensional transformado em um problema bidimensional pelo uso de coordenadas não apropriadas. O problema unidimensional trata da condução radial numa casca cilíndrica, mas se uma região quadrada, como mostra a figura 3.3, for escolhida como o domínio de cálculo, o cálculo então é feito para o sistema de coordenadas (x, y) e assim, o problema torna-se bidimensional.

O fenômeno é governado, para o problema bidimensional, para $\Gamma = 1$, pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(-1 \frac{\partial f}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-1 \frac{\partial f}{\partial Y} \right) = S(X, Y)$$

A solução analítica para este problema é:

$$f(X, Y) = \frac{\text{Ln}(R)}{2 \cdot \text{Ln}(1 + \sqrt{2})}$$

$$\text{sendo, } R = \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(Y + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

onde, R é o raio da casca cilíndrica, conforme a figura 3.3.

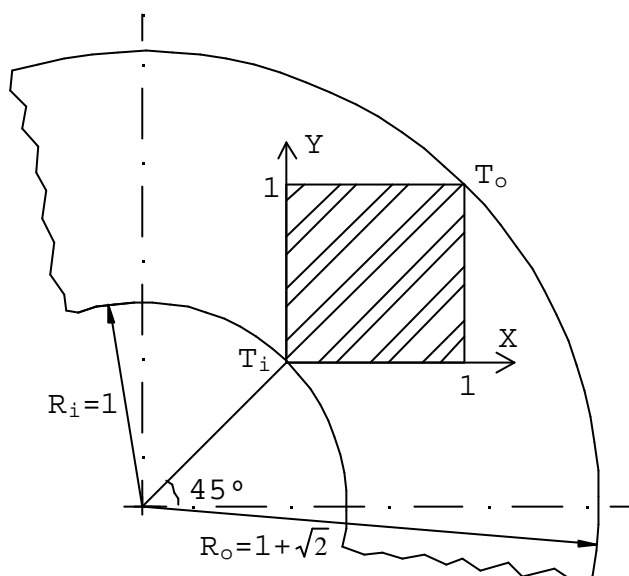
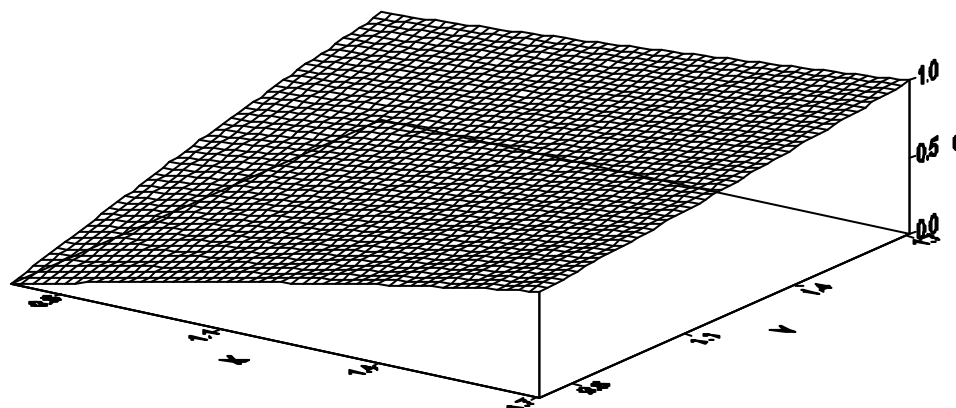


Figura 3.3 – Região quadrada na casca cilíndrica.

O problema foi resolvido utilizando malhas regulares de 5×5 , 10×10 , 15×15 e 20×20 volumes de controle, ou seja, $\Delta = 1/5$, $\Delta = 1/10$, $\Delta = 1/15$ e $\Delta = 1/20$.

A distribuição da variável dependente f , solução analítica, é apresentada nos gráficos da figura 3.4.



(a)

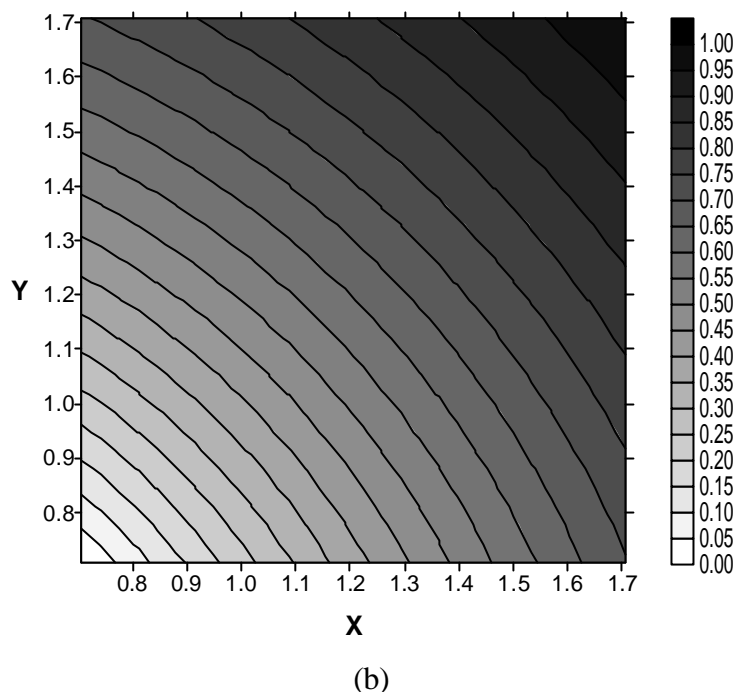


Figura 3.4 – Gráficos: (a) tridimensional e (b) bidimensional (*iso-linhas*), da solução analítica.

A figura 3.5 apresenta o gráfico do erro percentual em função da malha, fazendo um comparativo dos esquemas de discretização DIF. CENTRAL, FLUX-SPLINE e FLEX.

O erro com relação à solução analítica é definido pelos autores como:

$$\text{Erro percentual } (\mathbf{e}) = 100 \cdot \left| \frac{\mathbf{f}_{\text{calc}} - \mathbf{f}_{\text{exato}}}{\mathbf{f}_{\text{exato}_{\text{max}}} - \mathbf{f}_{\text{exato}_{\text{min}}}} \right|$$

Através da figura 3.5, observamos que o esquema FLUX-SPLINE se mostrou superior ao esquema FLEX e ao esquema de DIF. CENTRAL.

Isso mostra que para os casos onde a variável dependente e suas derivadas primeiras, no caso os fluxos, não se comportam como no perfil proposto, o esquema FLUX-SPLINE mostra um desempenho superior aos outros dois esquemas.

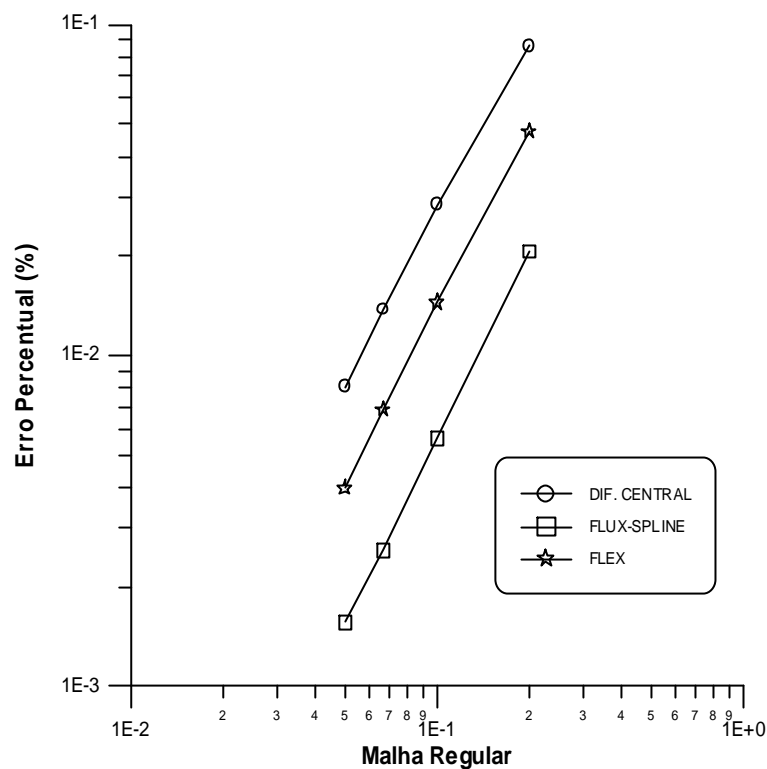


Figura 3.5 – Gráfico do erro percentual para $\Delta = 1/5$, $\Delta = 1/10$, $\Delta = 1/15$ e $\Delta = 1/20$.

3.1.2. CONVECÇÃO-DIFUSÃO

Problema Teste 3

Varejão (1979) testou este problema cujo campo de velocidade é tal que produz um fluxo recirculante dentro de um domínio quadrado. A equação de governo para este problema é:

$$\frac{\partial}{\partial X}(rUT) + \frac{\partial}{\partial Y}(rVT) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma \frac{\partial T}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma \frac{\partial T}{\partial Y}\right) + S$$

A solução analítica para este problema é:

$$T(X, Y) = B \cdot (1 - X)^2 \cdot (1 - Y)^2$$

e, as componentes das velocidades são dadas por:

$$U = A \cdot (Y - Y^3) \cdot (2X^2 - X^4 - 1)$$

$$V = -A \cdot (X - X^3) \cdot (2Y^2 - Y^4 - 1)$$

onde, X e Y são as coordenadas com origem no centro do quadrado. X e Y variam de -1 a +1.

As propriedades \mathbf{r} e Γ são constantes e iguais a 1 e as condições de contorno para T são $T = 0$ em todos os contornos.

O parâmetro A é determinado pelo número de Péclet e o parâmetro B, que controla o valor máximo de T, foi igualado a 1, assim o valor máximo de T é igual a 1.

O termo fonte correspondente é:

$$S = 2 \cdot \left[(2X - X^2) + (2Y - Y^2) \right]$$

A figura 3.6 apresenta uma comparação do erro percentual para os esquemas de POWER LAW, FLUX-SPLINE e FLEX, como uma função do número de Péclet, para uma malha regular de 15 x 15 volumes de controle, ou seja, $\Delta = 1/15$.

O erro com relação à solução analítica é definido pelos autores como:

$$\text{Erro percentual } (\mathbf{e}) = 100 \cdot \left| \frac{\mathbf{f}_{\text{calc}} - \mathbf{f}_{\text{exato}}}{\mathbf{f}_{\text{exato}_{\text{max}}} - \mathbf{f}_{\text{exato}_{\text{min}}}} \right|$$

A figura 3.6 nos mostra que o método FLEX apresentou valores dos níveis de erros intermediários quando comparados aos métodos FLUX-SPLINE e DIF. CENTRAL.

Problema Teste 4

Este problema trata do transporte de um pulso em \mathbf{f} num campo de velocidade uniforme. Este teste foi projetado para avaliar a falsa difusão de esquemas numéricos em problemas de convecção-difusão, como descrito por Raithby (1976), devido à variação do ângulo que o vetor velocidade faz com a malha.

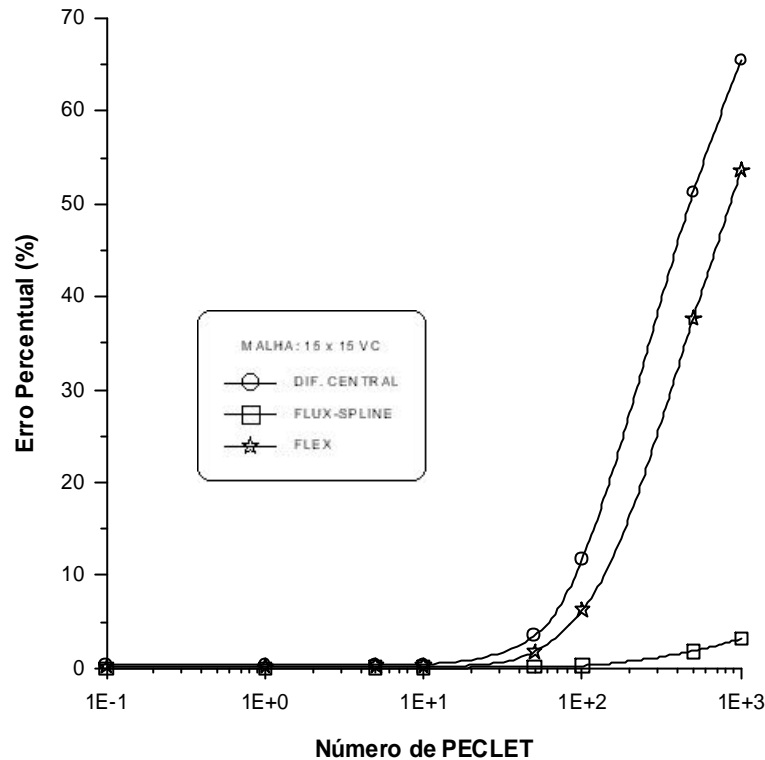


Figura 3.6 – Gráfico do erro percentual para $\Delta = 1/15$.

A equação de governo para este problema sob as coordenadas, S na direção do escoamento e N perpendicular ao escoamento, é:

$$\frac{\partial}{\partial S}(\mathbf{r}V_S \mathbf{f}) + \frac{\partial}{\partial S} \left(-\Gamma \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial S} \right) + \frac{\partial}{\partial N} \left(-\Gamma \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial N} \right) = 0$$

Utilizando-se o sistema de coordenadas x e y como mostrado na figura 3.7, a equação de governo é:

$$\frac{\partial}{\partial X}(\mathbf{r}U \mathbf{f}) + \frac{\partial}{\partial Y}(\mathbf{r}V \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial Y} \right)$$

As condições de contorno são mostradas na figura 3.7, onde θ é o ângulo de inclinação do vetor velocidade com relação ao eixo x . Observe que nas fronteiras, acima da linha que passa pelo ponto central do domínio, formando o ângulo θ com a horizontal, $\mathbf{f} = 1$ e abaixo $\mathbf{f} = 0$.

Raithby (1976) sugere que o número de Péclet (Pe), para este problema, seja igual a 450.

Os resultados são apresentados nas figuras 3.8 a 3.10, de forma que representem a distribuição de f ao longo da linha vertical ($X = 4,5$) mostrada na figura 3.7.

Nas figuras 3.8 a 3.10, pode ser visto o efeito da Falsa Difusão para os três esquemas de discretização FLEX, FLUX-SPLINE e POWER LAW.

Quando o vetor velocidade é alinhado com a linha da malha horizontal, $Y_c = 4,5$, $\theta = 0^\circ$, a figura 3.8 (a), os esquemas não apresentam o efeito da Falsa Difusão visto que pelo fato de terem sido gerados assumindo perfis exponenciais para a variável f .

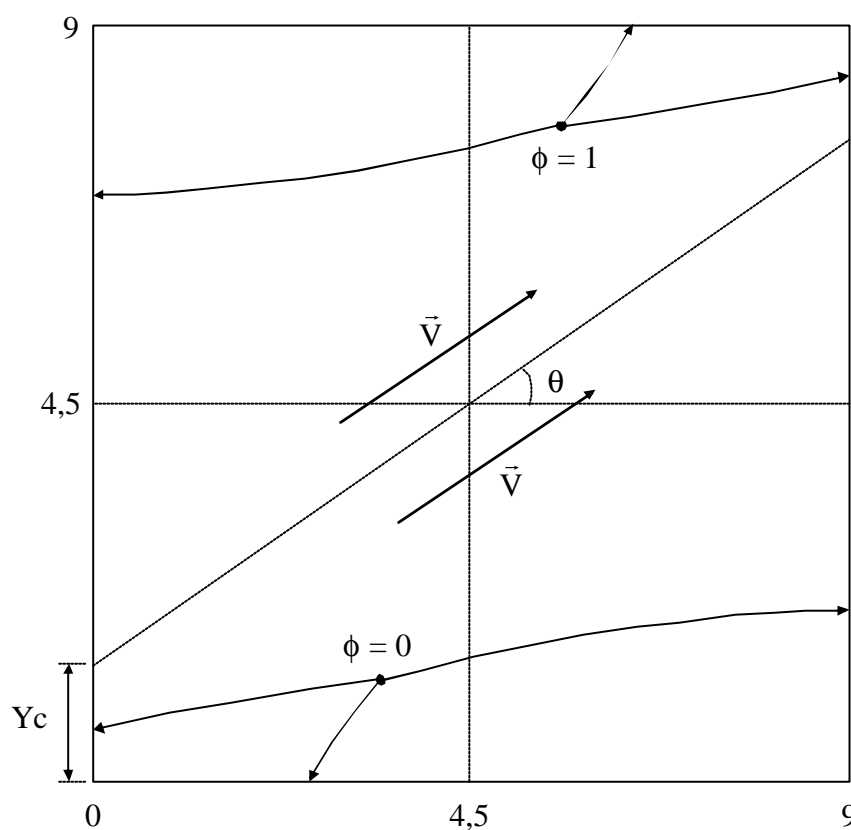


Figura 3.7 – Transporte de um pulso em ϕ numa região de velocidade constante.

O problema foi resolvido usando uma malha regular 11×11 e para diferentes valores do parâmetro Y_c , isto é, para diferentes ângulos de ataque (θ) da velocidade \vec{V} . A relação entre Y_c e θ é:

$$Y_c = 4,5 \cdot (1 - \tan \theta)$$

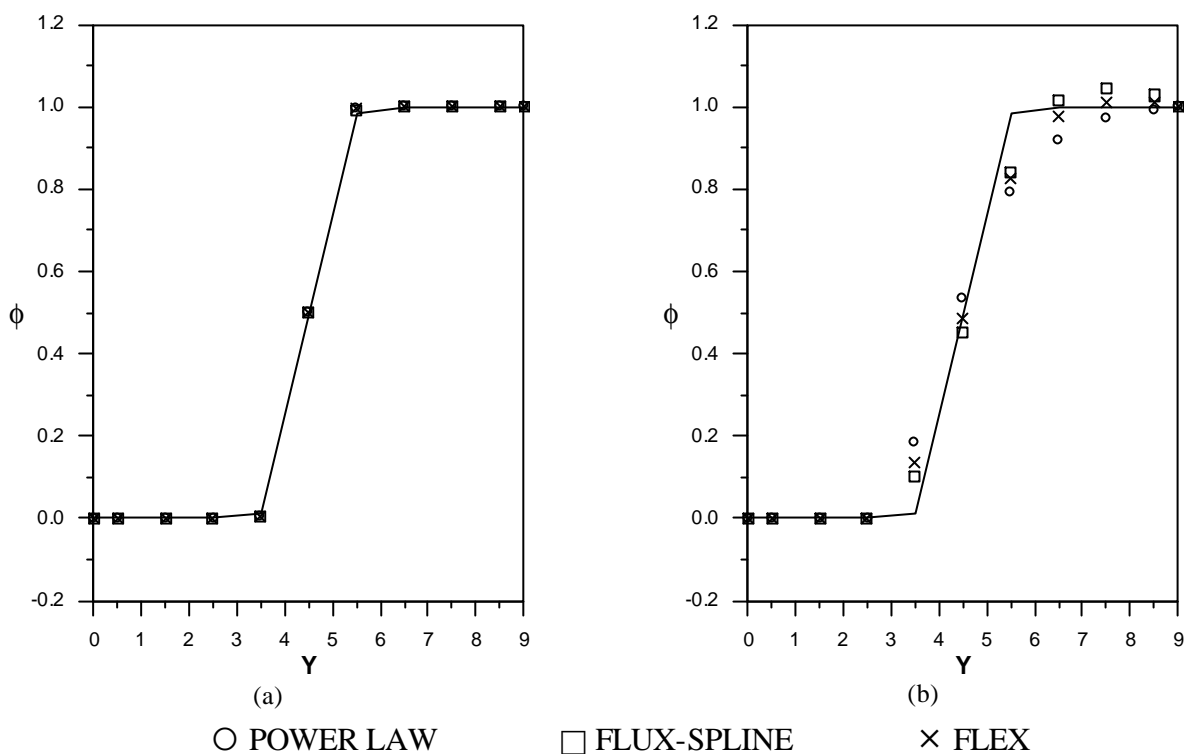


Figura 3.8 – Transporte convectivo de um pulso em f : perfil na linha central ($X = 4,5$) para: (a) $Y_c = 4,5$ ($\theta = 0^\circ$) e (b) $Y_c = 3,5$ ($\theta = 12,53^\circ$).

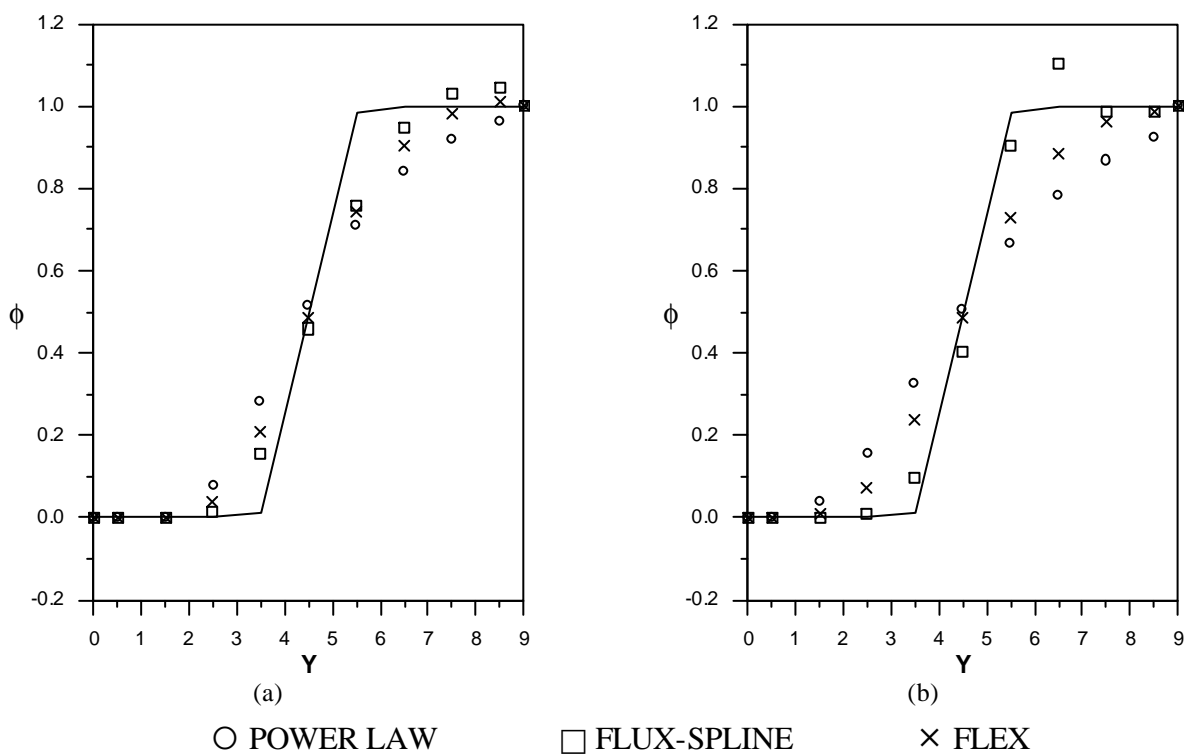


Figura 3.9 – Transporte convectivo de um pulso em f : perfil na linha central ($X = 4,5$) para: (a) $Y_c = 2,5$ ($\theta = 23,96^\circ$) e (b) $Y_c = 1,5$ ($\theta = 33,69^\circ$).

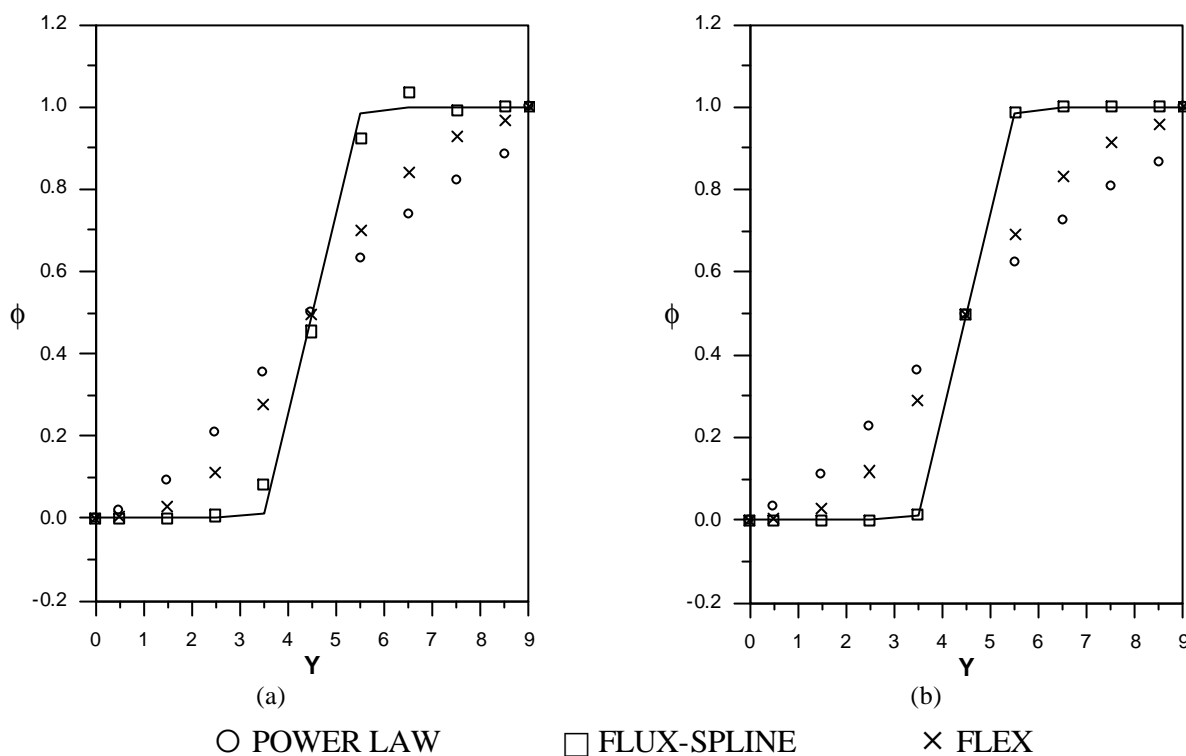


Figura 3.10 – Transporte convectivo de um pulso em f : perfil na linha central ($X = 4,5$) para: (a) $Y_c = 0,5$ ($\theta = 41,63^\circ$) e (b) $Y_c = 0,0$ ($\theta = 45^\circ$).

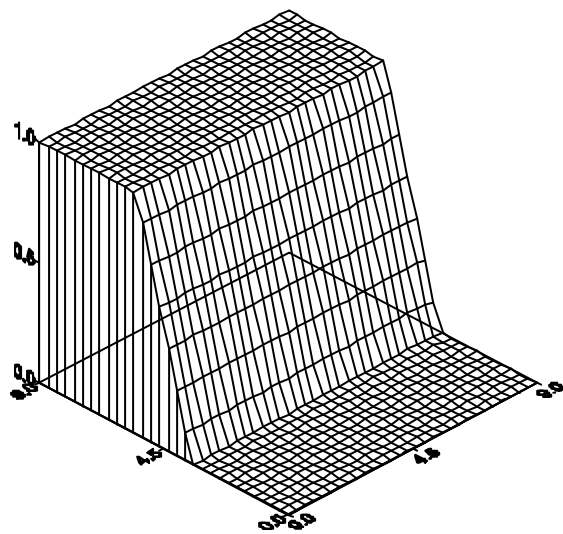
Nas figuras 3.8 a 3.10, pode ser visto o efeito da Falsa Difusão para os métodos FLEX, FLUX-SPLINE e DIF. CENTRAL.

Quando o vetor velocidade é alinhado com a linha da malha horizontal, $Y_c = 4,5$, $\theta = 0^\circ$, a figura 3.8 (a), todos os métodos não apresentam o efeito da Falsa Difusão.

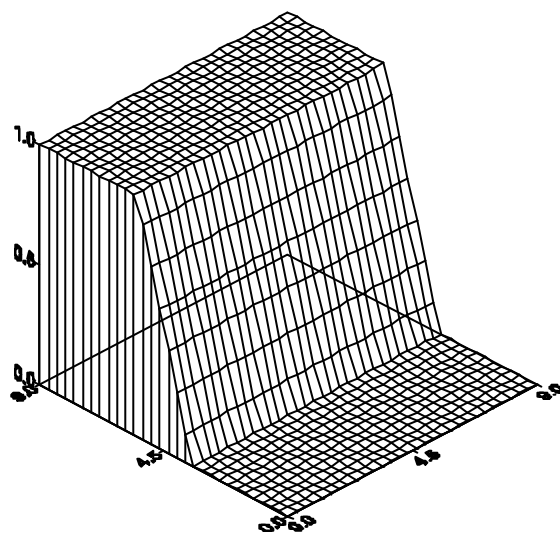
Com o aumento do ângulo θ , ambos os métodos FLEX e DIF. CENTRAL vão piorando, sendo piores com $Y_c = 0$, $\theta = 45^\circ$, figura 3.10 (b), ou seja, esses métodos são afetados pela Falsa Difusão.

Já o método FLUX-SPLINE apresenta alguns sinais da Falsa Difusão, dando o pior resultado para $Y_c = 2,5$, $\theta = 23,96^\circ$, figura 3.9 (a), e não apresentando esses efeitos para $Y_c = 0$, $\theta = 45^\circ$, figura 3.10 (b).

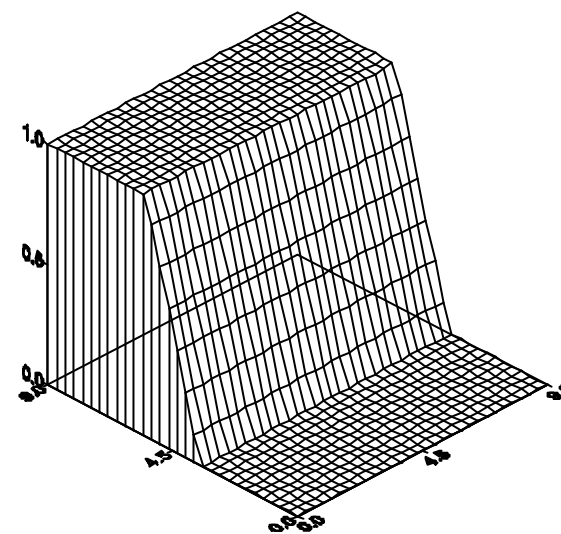
Os efeitos da Falsa Difusão em todo o domínio do estudo podem ser vistos nos gráficos tridimensionais nas figuras 3.11 a 3.16.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.11 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 4,5$ ($\theta = 0^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.

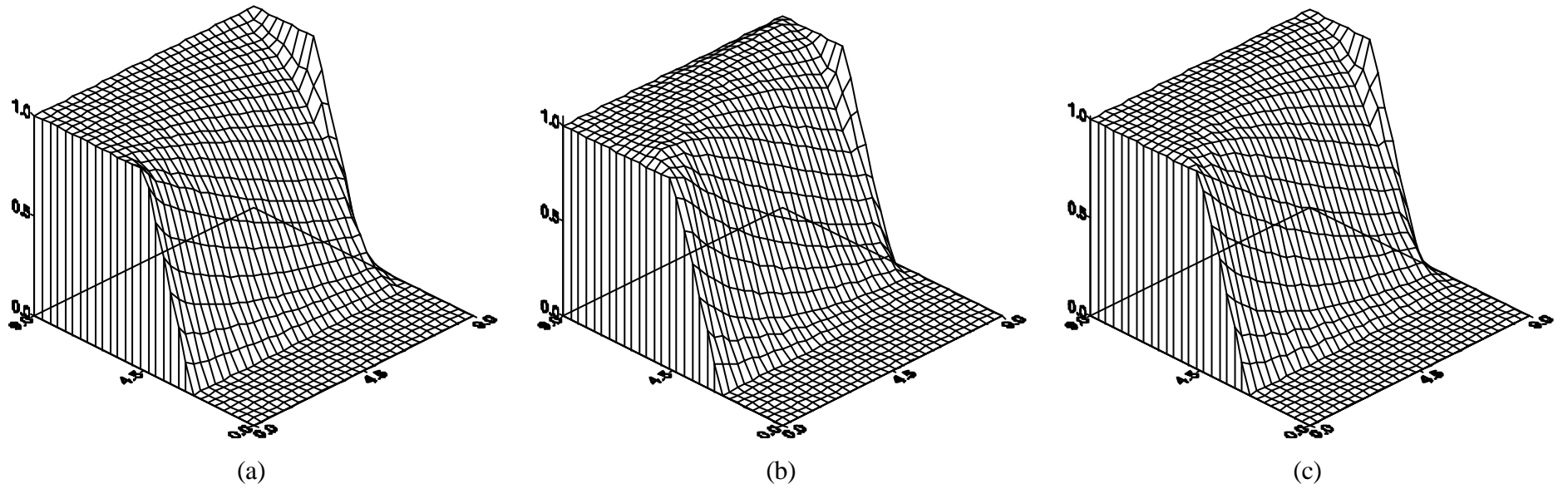


Figura 3.12 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 3,5$ ($\theta = 12,53^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.

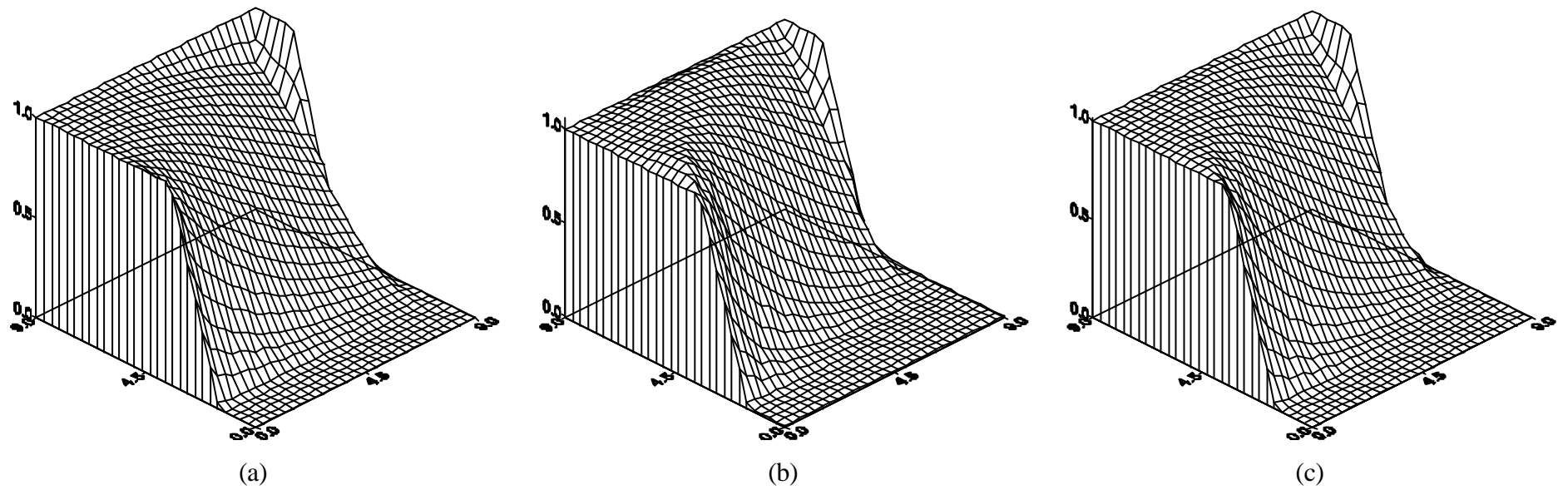


Figura 3.13 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 2,5$ ($\theta = 23,96^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.

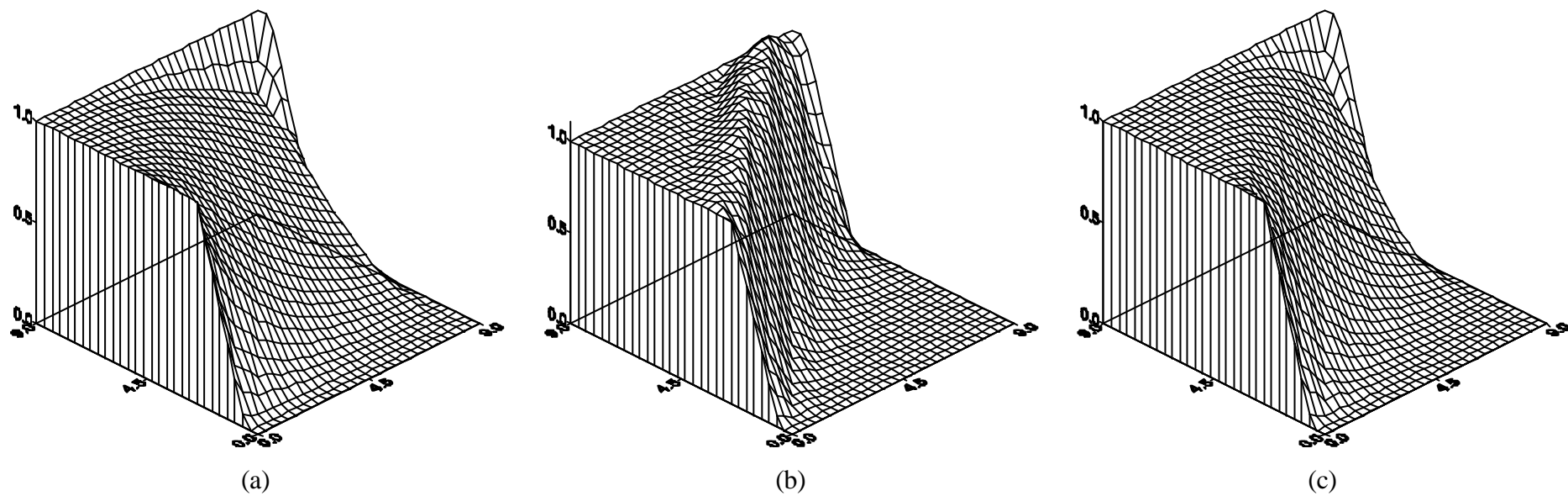


Figura 3.14 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 1,5$ ($\theta = 33,69^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.

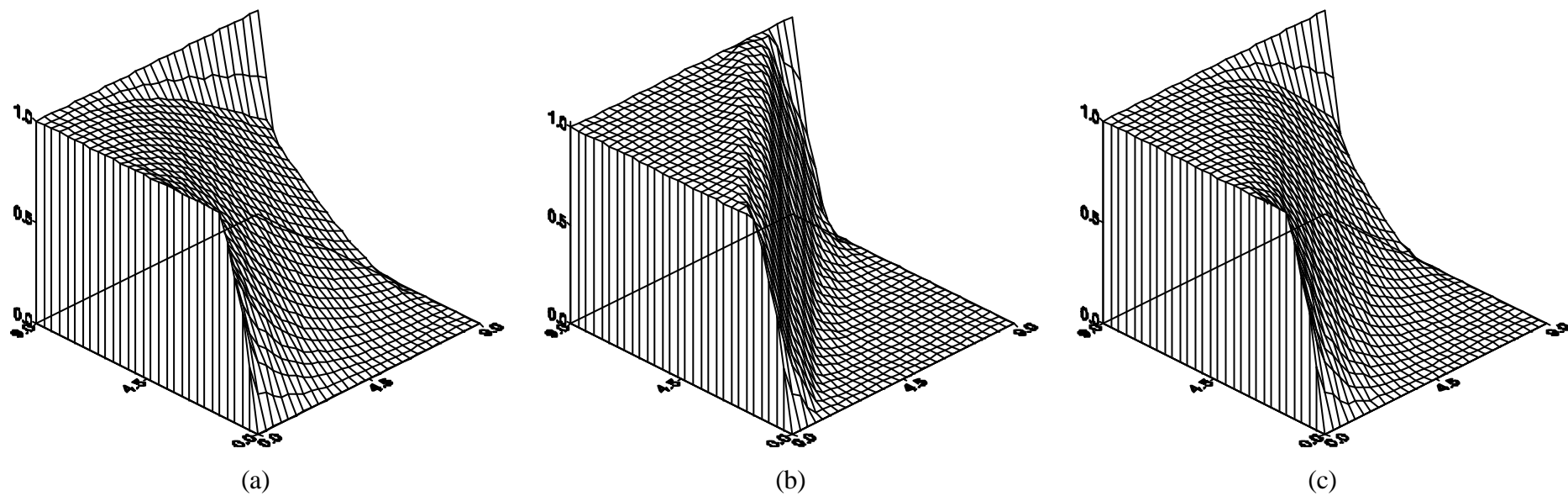


Figura 3.15 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 0,5$ ($\theta = 41,63^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.

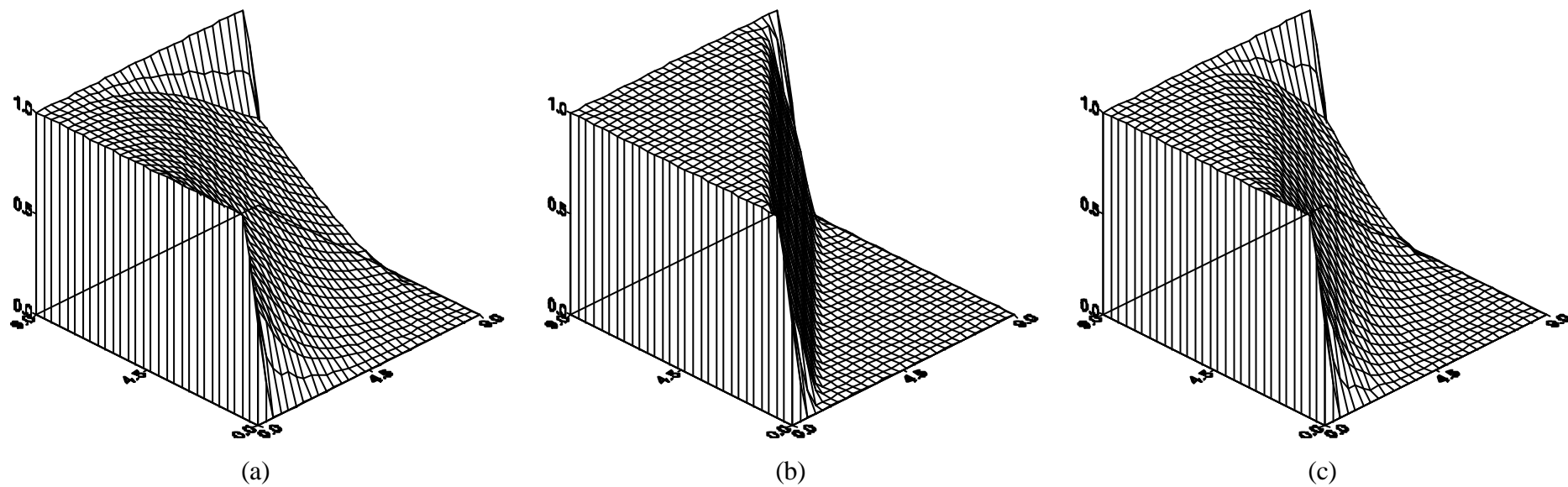


Figura 3.16 – Gráfico tridimensional de um pulso em f para $Y_c = 0,0$ ($\theta = 45^\circ$): (a) POWER LAW, (b) FLUX-SPLINE e (c) FLEX.

3.1.3. CONCLUSÕES SOBRE REGIME PERMANENTE

Como foi observado nos quatro problemas apresentados acima, o método FLEX só apresentou resultados melhores para um problema de difusão pura cuja derivada do perfil interpolante seja semelhante ao perfil dos fluxos J proposto.

No demais, o método FLUX-SPLINE continua dando resultados melhores.

O método de DIF. CENTRAL se mostrou inferior aos outros dois métodos já citados.

3.2. REGIME TRANSIENTE

3.2.1. DIFUSÃO PURA

Problema Teste 5

O problema aqui simulado é o da propagação de uma onda escalar unidimensional em uma barra de seção reta e propriedades constantes, engastada em uma extremidade e submetida na outra a um carregamento constante, mostrada na figura 3.17.

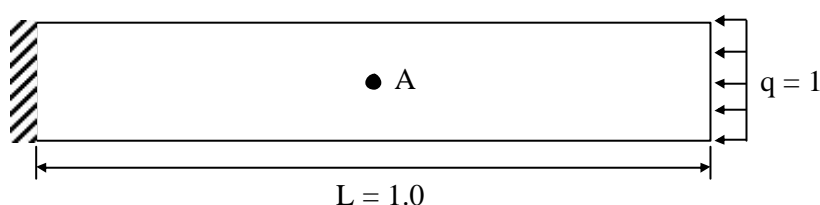


Figura 3.17 – Características da barra unidimensional.

Utilizou-se o esquema de Diferenças Finitas para a discretização do termo transiente da equação de governo, na sua forma mais simples. O objetivo é avaliação do deslocamento no centro da barra (ponto A) ao longo do tempo adimensional.

A equação diferencial parcial adimensional, que governa a propagação da onda na barra é, no caso de propriedades do meio assumidas como constantes:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(-\Gamma \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = 0$$

As condições iniciais e de contorno são:

$$\theta(X, \tau = 0) = \frac{\partial \theta(X, \tau = 0)}{\partial \tau} = 0$$

$$\theta(X = 0, \tau > 0) = 0$$

$$\theta(X = 1, \tau > 0) = 1$$

Os resultados para o deslocamento da seção central da barra ao longo do tempo adimensional, são plotados para os três esquemas nas figuras 3.18 e 3.19 para malhas com 9 ($\Delta = 1/9$) e 27 ($\Delta = 1/27$) volumes de controle, respectivamente e 400 passos no tempo ($\Delta t = 1/400$) em comparação com uma solução de referência obtida por diferença central com 243 volumes de controle.

Podemos observar que antes do degrau, o esquema FLEX é o mais próximo da solução de referência nas duas malhas utilizadas. Valores abaixo desta solução, “undershoot”, só aparecem no esquema FLUX-SPLINE e os mesmos persistem na malha de 27 volumes de controle.

Depois do degrau, nota-se que as oscilações estão presentes em todos os esquemas, com “undershoot” e “overshoot” mais pronunciados para o esquema de diferença central, sendo que o esquema FLEX apresenta valores intermediários.

Problema Teste 6

Passaremos agora ao problema da equação escalar da onda no bidimensional. A equação diferencial de governo contém o divergente do vetor fluxo e de forma geral pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(-\Gamma \cdot \frac{\partial f}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\Gamma \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \right) = 0$$

O comportamento dos esquemas será aferido através da simulação da propagação de uma onda em uma placa plana. As condições iniciais são como no caso anterior:

$$f(X, Y, t = 0) = \frac{\partial f(X, Y, t = 0)}{\partial t} = 0$$

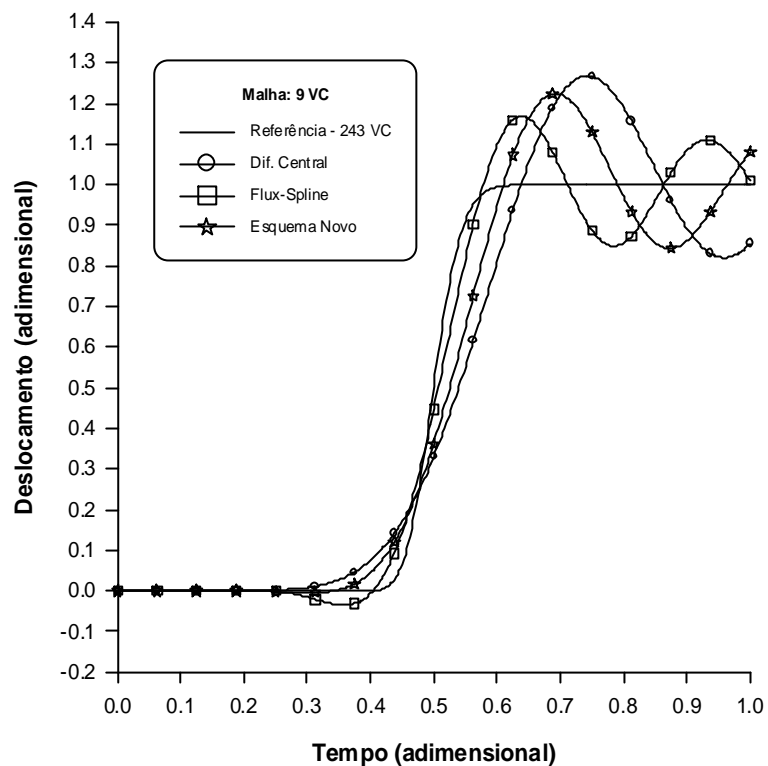


Figura 3.18 – Deslocamento da onda (ponto A), com $\Delta t = 1/400$, $\Delta = 1/9$.

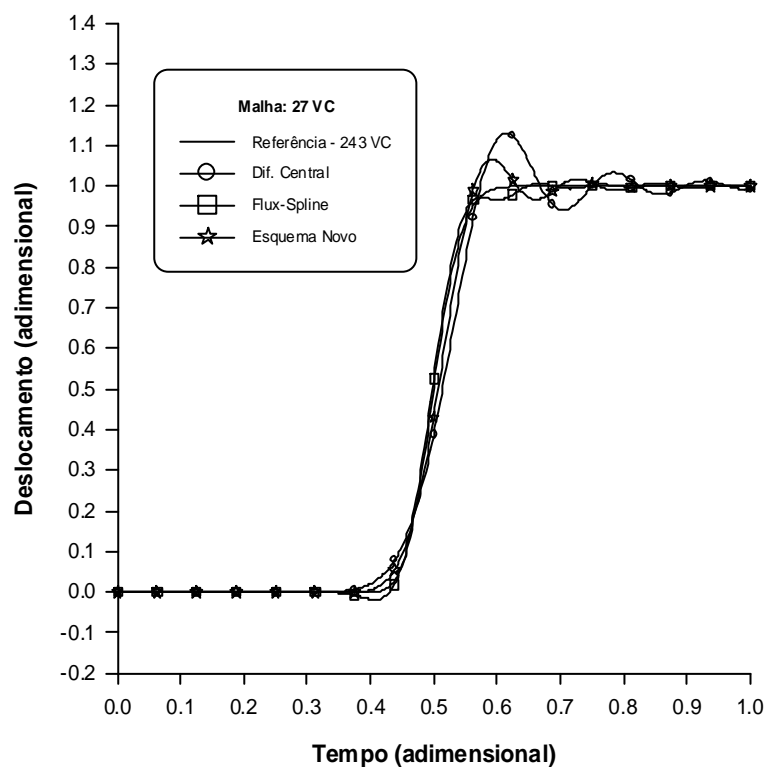


Figura 3.19 – Deslocamento da onda (ponto A), com $\Delta t = 1/400$, $\Delta = 1/27$.

As condições de contorno são impostas na face oeste ($X=0$), de modo a gerar uma onda simétrica em relação ao eixo X que se propaga a partir de um quinto desta superfície pela placa quadrada. Assim temos:

$$f\left(X=0, \frac{2}{5} \leq Y \leq \frac{3}{5}, 0 < t \leq \frac{1}{3200} \cdot t_{\max}\right) = 100$$

enquanto nos contornos restantes impõe-se $f(X, Y, t) = 0$, conforme mostra a figura 3.20.

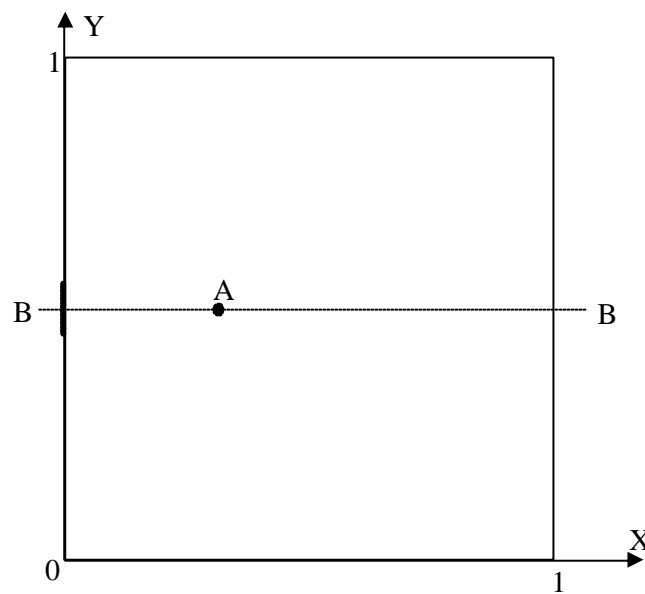


Figura 3.20 – Características do problema bidimensional.

Para $\frac{1}{3200} \cdot t_{\max} \leq t \leq t_{\max} = \frac{1}{3}$ todo o contorno é submetido ao deslocamento nulo enquanto o fenômeno prossegue através da placa.

Apresentaremos a seguir, na figura 3.21, um resultado obtido por uma malha de 320×320 volumes de controle e 800 passos no tempo, para $t_{\max} = \frac{1}{3}$ sob o esquema de Diferença Central, que será usado como referência para os demais resultados com malhas menos refinadas e diferentes esquemas.

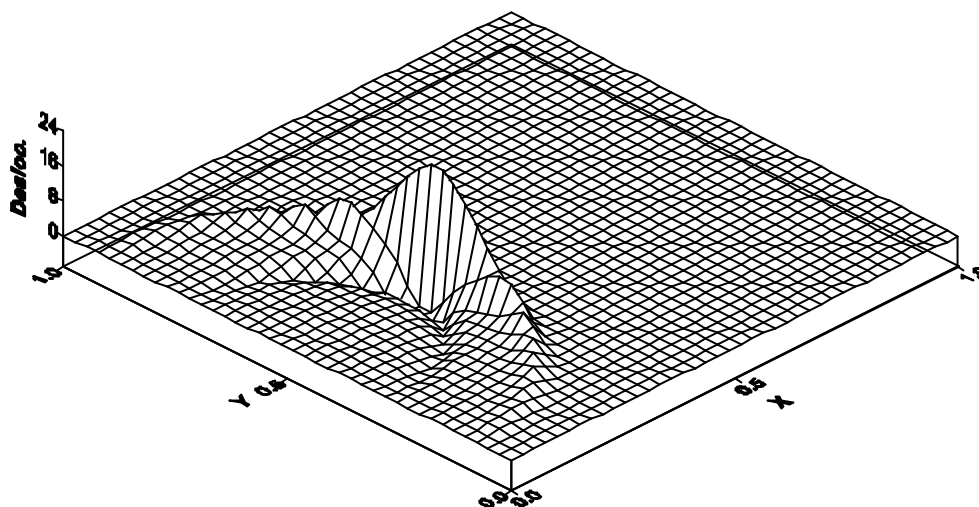


Figura 3.21 – Deslocamento da placa plana sob malha de 321 x 321 volumes de controle usando o método de DIF. CENTRAL.

Pode-se ver em toda magnitude a natureza de uma onda gerando grandes gradientes por onde passa, enquanto que o espaço à jusante está em repouso. As linhas de deslocamento constante são mostradas na figura 3.22.

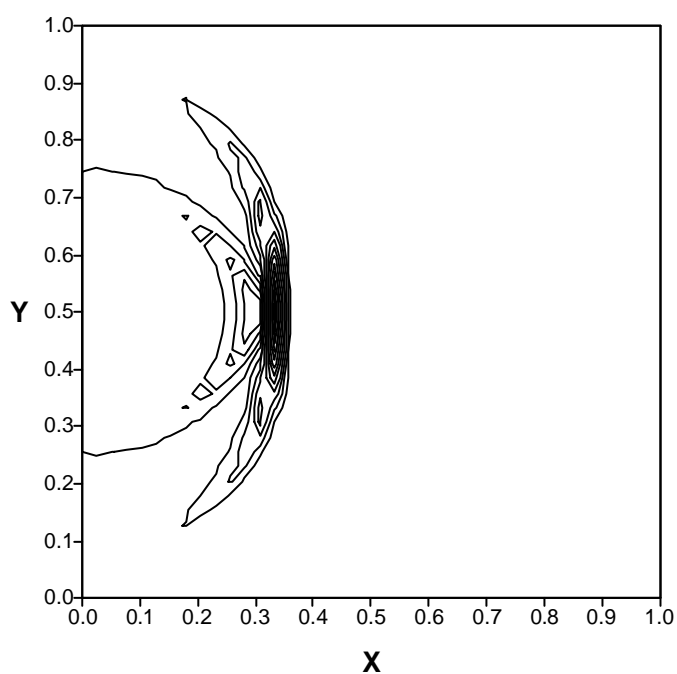


Figura 3.22 – Linhas de deslocamento constante da placa plana sob malha de 321 x 321 volumes de controle usando o método de DIF. CENTRAL.

A onda se concentra numa pequena área da placa, o que desta forma dificulta a simulação, tendo em vista os grandes gradientes que ali se formam.

Os resultados para o problema da onda escalar bidimensional são mostrados nas figuras 3.23 a 3.25, com malhas de 31 x 31, 61 x 61 e 121 x 121 volumes de controle.

Pode-se observar que o esquema FLUX-SPLINE tem com característica a geração de perturbações à jusante da onda. Essa característica não é desejável, pois cria um sinal, no caso um ruído, onde nada existe, pois a onda ainda não atingiu essa região.

No esquema DIF. CENTRAL observa-se claramente o achatamento da onda, muito mais pronunciado que aquele produzido pelos esquemas FLUX-SPLINE e FLEX. Esse achatamento mostra a dificuldade que esse esquema sofre na presença de grandes gradientes como os que ocorrem neste tipo de fenômeno. Esta característica já havia sido apontada na difusão pura em regime permanente. Percebe-se que este esquema não produz perturbações à jusante da onda.

Para o esquema FLEX, nota-se que em nenhuma das malhas é gerado ruído a jusante da onda, o que o coloca neste quesito, ao lado do esquema de diferença central, e é um avanço em relação ao esquema FLUX-SPLINE.

Problema Teste 7

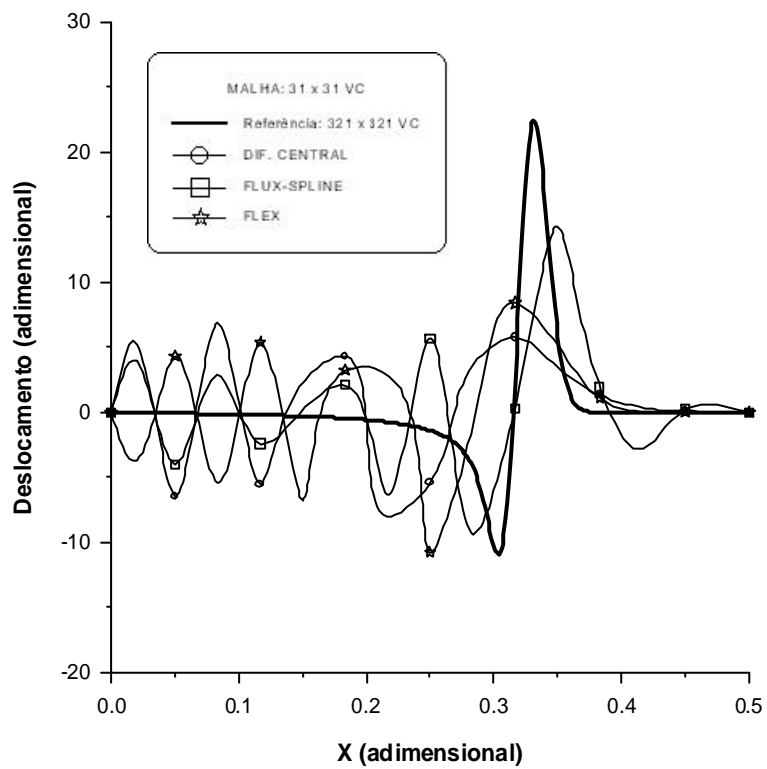
O problema a ser simulado a propagação de uma onda sísmica num caso bidimensional. A equação diferencial de governo contém o divergente do vetor fluxo e de forma geral pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(-\Gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\Gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial Y} \right) = S$$

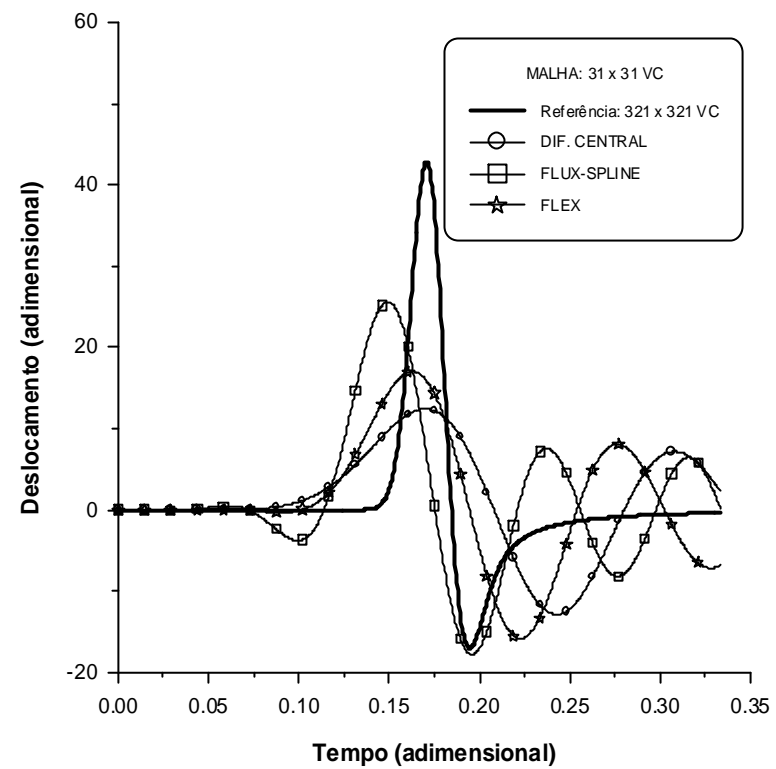
O comportamento dos esquemas será novamente aferido através da simulação da propagação de uma onda em uma placa plana.

Para gerar uma onda sísmica, é necessário, para que haja uma perturbação se propagando através do meio, a introdução de um termo fonte. Neste caso será usada a expressão abaixo:

$$S = \left[1 - 2\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{f}_c \cdot t_d)^2 \right] \cdot e^{-\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{f}_c \cdot t_d)^2}$$

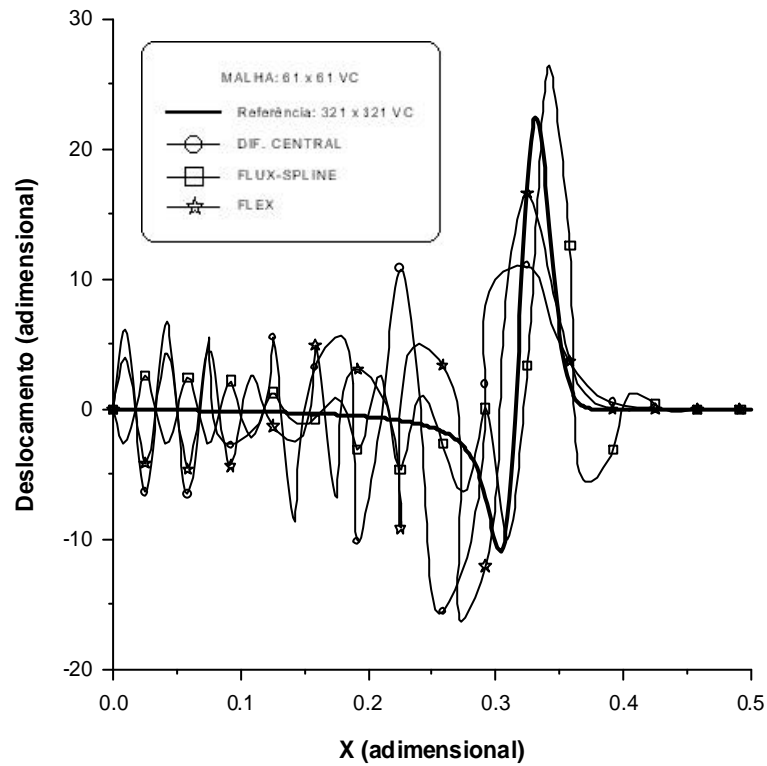


(a)

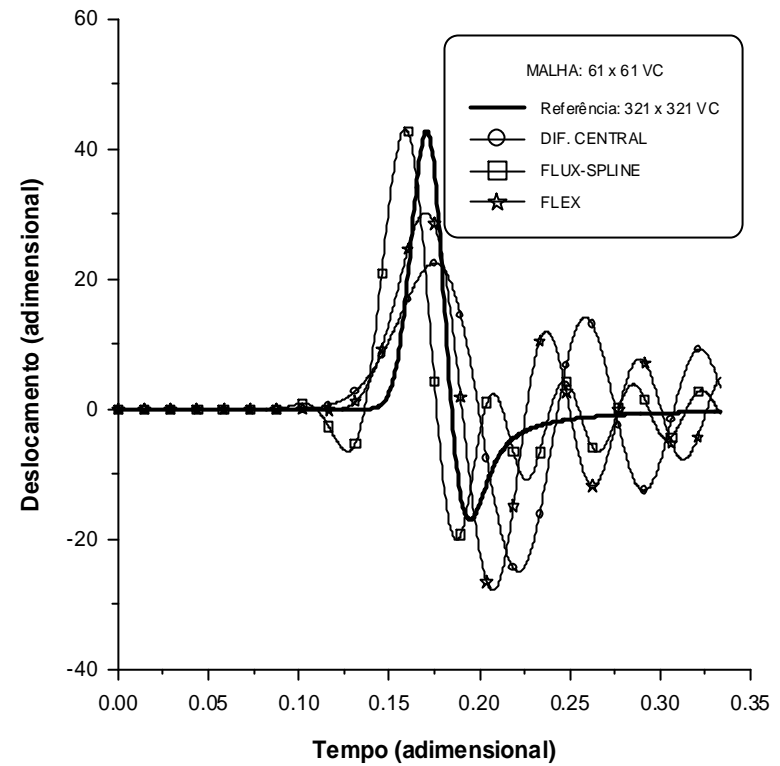


(b)

Figura 3.23 – Deslocamento da onda para 31 x 31 volumes de controle (referência: DIF. CENTRAL):
 (a) ao longo de X na linha BB' e (b) ao longo do tempo (ponto A).

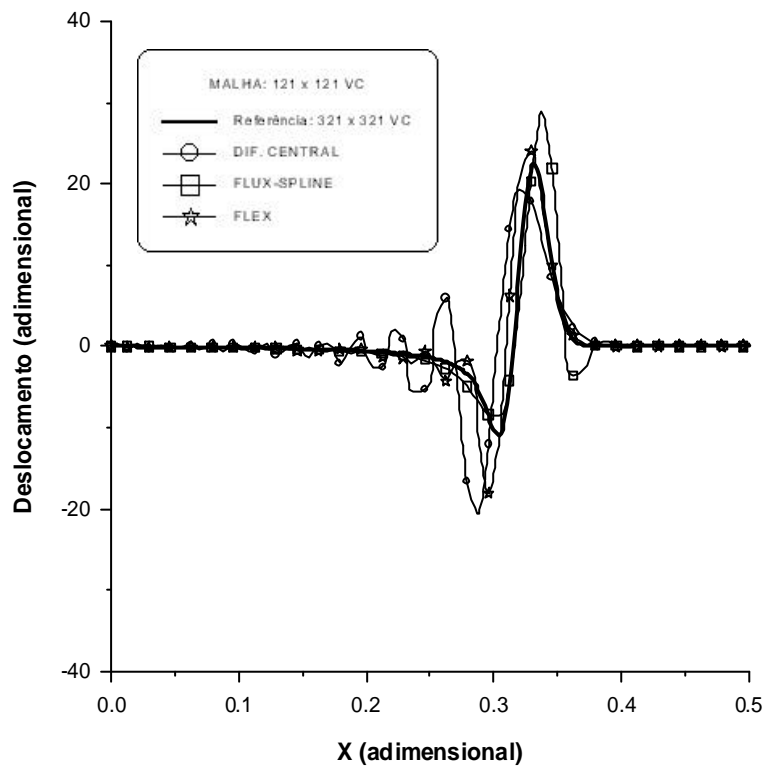


(a)

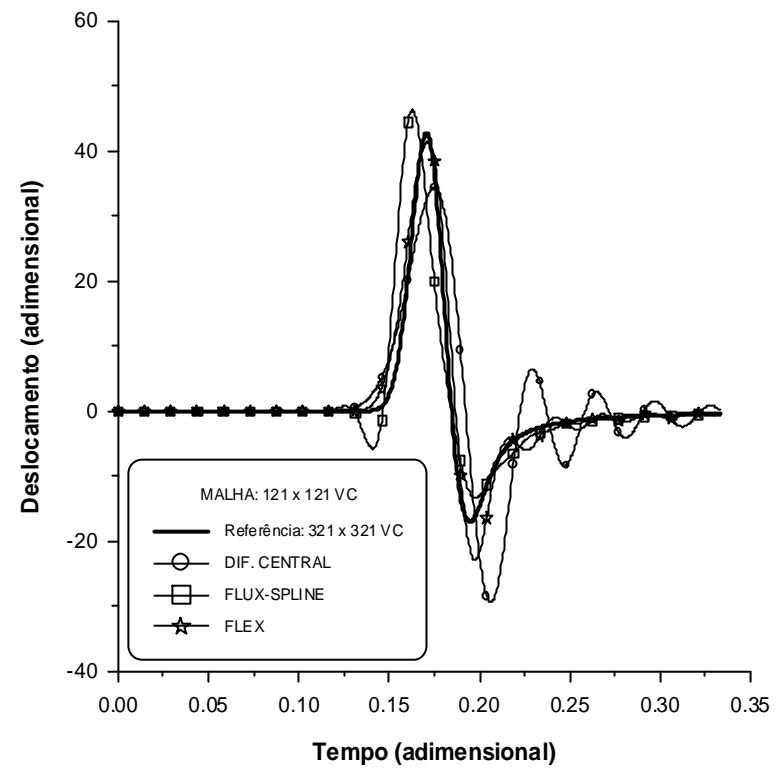


(b)

Figura 3.24 – Deslocamento da onda para 61 x 61 volumes de controle (referência: DIF. CENTRAL):
 (a) ao longo de X na linha BB' e (b) ao longo do tempo (ponto A).



(a)



(b)

Figura 3.25 – Deslocamento da onda para 121 x 121 volumes de controle (referência: DIF. CENTRAL):

(a) ao longo de X na linha BB' e (b) ao longo do tempo (ponto A).

onde, t é o tempo;

t_d é o tempo defasado, computando certa translação temporal para o cálculo do termo

fonte, de acordo com:
$$t_d = t - \frac{2\sqrt{p}}{f_c};$$

f_c é um parâmetro relacionado com a frequência de corte da fonte sísmica, onde:

$$f_{\text{corte}} = 3 \cdot f_c \cdot \sqrt{p}.$$

A figura 3.26 mostra o gráfico do termo fonte em função do tempo.

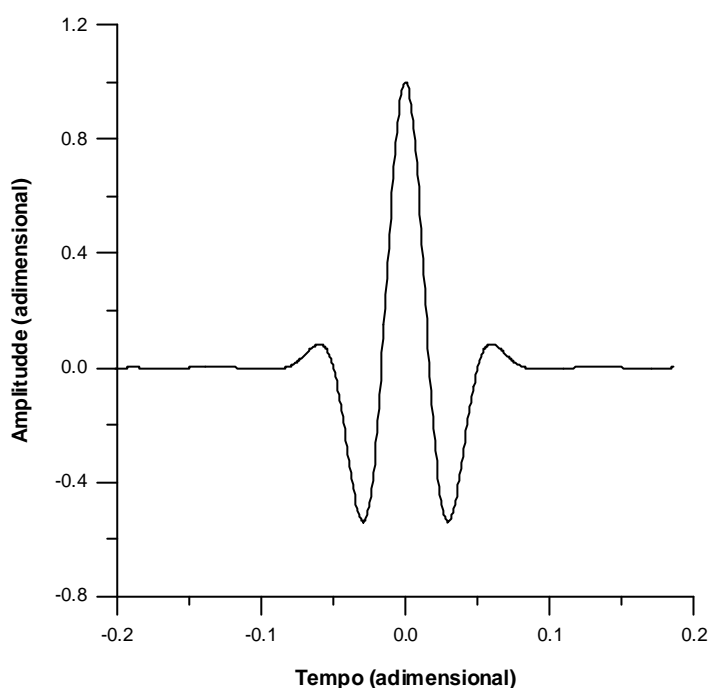


Figura 3.26 – Termo fonte em função do tempo.

O carregamento se dá através do termo fonte, aplicado no centro (ponto A) do domínio, conforme mostra a figura 3.27.

As condições iniciais e de contorno são:

$$f(X, Y, t = 0) = \frac{\partial f(X, Y, t = 0)}{\partial t} = 0$$

Nos contornos da placas impõe-se $f(X, Y, t) = 0$, conforme mostra a figura 3.27.

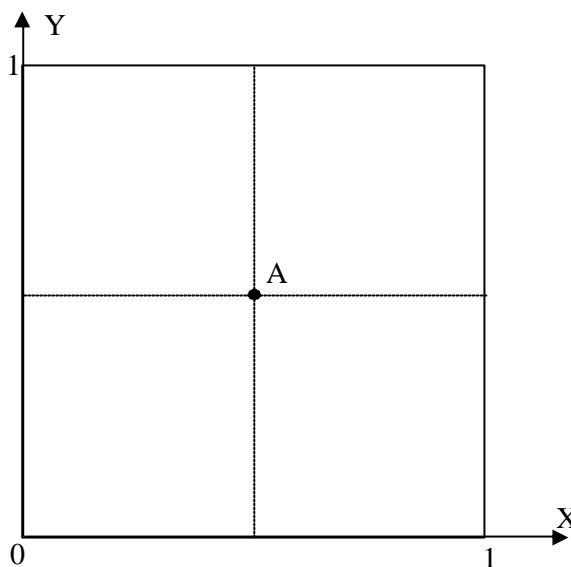


Figura 3.27 – Características do problema bidimensional.

Apresentaremos a seguir, na figura 3.28, o resultado obtido por uma malha de 243 x 243 volumes de controle, 800 passos no tempo sob o esquema de Diferença Central, que será usado como referência para os demais resultados com malhas menos refinadas e diferentes esquemas.

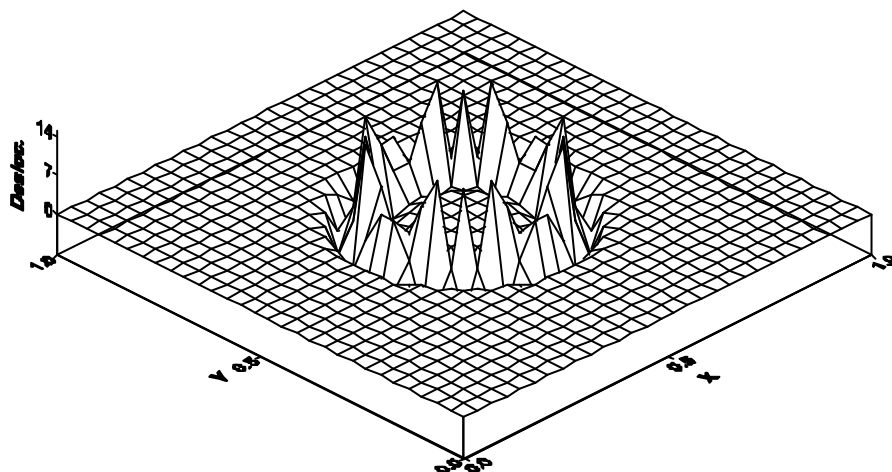


Figura 3.28 – Deslocamento da onda na placa plana sob malha de 243 x 243 volumes de controle usando o método de DIF. CENTRAL.

Os resultados para o deslocamento da onda na linha central ($Y = 0,5$) da barra ao longo do tempo adimensional são plotados na figura 3.29 e na figura 3.30 para malhas com 27 ($\Delta = 1/27$) e 81 ($\Delta = 1/81$) volumes de controle, respectivamente e 800 passos no tempo

($\Delta t = 1/800$) em comparação com uma solução de referência obtida por diferença central com 243 x 243 volumes de controle, e pelos esquemas DIF. CENTRAL e FLUX-SPLINE.

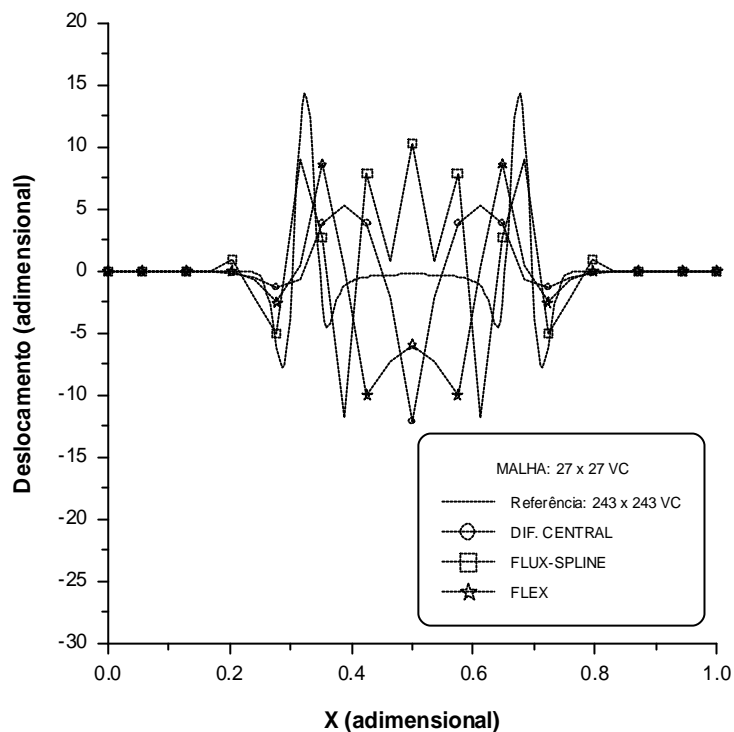


Figura 3.29 – Deslocamento da onda ao longo da linha central ($Y = 0,5$), para malha de 27 x 27 volumes de controle.

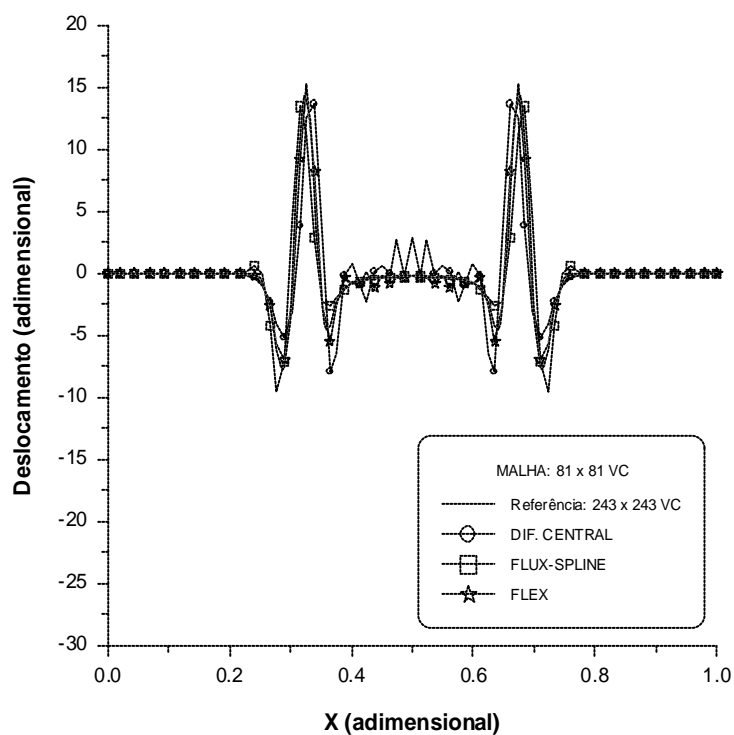


Figura 3.30 – Deslocamento da onda ao longo da linha central ($Y = 0,5$), para malha de 81 x 81 volumes de controle.

Pode-se observar que para a malha de 27 x 27 volumes de controle, o esquema FLUX-SPLINE apresentou perturbações indesejáveis à jusante da onda. Estas persistem ainda que em escala menor, na malha de 81 x 81 volumes de controle. Nota-se um pronunciado “undershoot” gerado por este esquema, ao representar o mínimo do deslocamento na malha mais refinada.

No esquema de DIF. CENTRAL percebe-se que não são produzidas perturbações à jusante da onda, mas que no interior da frente cilíndrica aparecem oscilações mesmo na malha 81 x 81 volumes de controle.

Para o esquema FLEX, em nenhuma das malhas é gerado ruído a jusante da onda, o que é um avanço em relação ao esquema FLUX-SPLINE, notando-se que as oscilações presentes dentro da região cilíndrica, na malha de 27 x 27 volumes de controle, são as menores entre os três esquemas de discretização e praticamente desaparecem na malha mais refinada com 81x81 volumes de controle.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho, o esquema FLEX foi empregado em diferentes tipos de situações, em problemas uni e bidimensionais, regidos por equações diferenciais parciais elípticas (convecção-difusão) em regime permanente e equações diferenciais parciais hiperbólicas (propagação de onda).

O esquema foi testado para avaliar sua habilidade em resolver esta grande classe de problemas de engenharia envolvendo o transporte de uma propriedade específica, seja por meio de difusão pura ou por convecção-difusão.

Os resultados aqui obtidos pelo esquema FLEX, quando comparados aos esquemas de DIFERENÇA CENTRAL e FLUX-SPLINE, afirmam sua habilidade em lidar com as dificuldades contidas em problemas teste de difusão pura sob regime permanente, quando a derivada do perfil interpolante é semelhante ao fluxo J proposto (exponencial) e em casos de problemas hiperbólicos como os de propagação de onda.

Os resultados obtidos pelo esquema FLEX no restante dos problemas teste, se mostraram superiores aos obtidos pelo esquema de DIF. CENTRAL e inferiores aos obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE.

Isto se deveu ao fato que tais problemas possuem distribuições de fluxo, que se afastam daquela proposta por este trabalho, o que mostra a necessidade de, dependendo das características do fenômeno, escolher o perfil mais adequado de forma a se diminuir o esforço computacional.

Pode-se concluir por este trabalho, que o esquema FLEX pode ser empregado em problemas hiperbólicos do tipo que foram aqui abordados e em problemas sob regime permanente onde o comportamento da derivada do perfil interpolante é semelhante ao fluxo J proposto (exponencial).

Nos problemas testes aqui simulados, o esquema de discretização do termo transiente utilizado foi o de Diferenças Finitas incondicionalmente estável.

Castillo (2001) testou alguns problemas de propagação da onda para vários esquemas de discretização temporal, onde pôde concluir que o esquema de Diferenças Finitas não apresenta resultados muito bons, quando comparados aos esquemas de Houbolt, Wilson θ , CHL β e HHT α .

É provável que a implantação destes esquemas junto ao aqui proposto, por meio de testes, venha a beneficiar o desempenho do esquema FLEX nos problemas de propagação de ondas.

Pode-se esperar que num futuro próximo, haja motivação no sentido de se criar um programa (pacote computacional) para solução de problemas de engenharia, utilizando o esquema de Volumes Finitos, onde, dependendo do tipo de problema a ser resolvido, poder-se-á escolher o esquema de discretização que melhor se adapta ao fenômeno, reduzindo desta forma o esforço computacional.

4.2. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE

Como sugestão para futuros trabalhos, o esquema FLEX poderá ser testado, com o objetivo de reduzir esforço computacional, para o seguinte caso:

- ✓ Problemas de propagação de ondas utilizando-se esquemas de discretização no tempo mais eficientes e melhores adaptados a este esquema, do que o aqui usado. Ou seja, o esquema de Diferenças Finitas, poderá ser substituído pelos esquemas Houbolt, Wilson θ , CHL β e HHT α para avaliar em qual deles se obtém os melhores resultados.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

BORDING, R. P., LINES, L. R. **Seismic Modeling and Imaging with the Complete Wave Equation.** **Society of Exploration Geophysicists.** 1997.

CASTILLO, G. A. V. **Análise Comparativa dos Esquemas Incrementais de Avanço no Tempo com o Método de Elementos de Contorno.** 2001. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, UFES, ES.

HSU, C. **A curvilinear-coordinate method for momentum, heat and mass transfer in domain of irregular geometry.** 1981. Tese de Doutorado, University of Minnesota, EUA.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** LTC editora, 1995.

NIECKELE, A. O. **Development and Evaluation of Numerical Schemes for the Solution of Convection-Diffusion Problems.** 1985. Tese de Doutorado, University of Minnesota, USA.

OLIVEIRA, P. C. **Esquema Flux-Spline Aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural.** 1997. Dissertação de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, SP.

PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.** McGraw-Hill, Hemisphere Publication, 1980.

PATANKAR, S.V., KARKI, K. C., MONGIA, H. C. **Development and Evaluation of Improved Numerical Schemes for Recirculating Flows,** AIAA 87-0061, 1987.

PATANKAR, S.V., SPALDING, D. B. **Heat and Mass Transfer in Boundary Layers,** 2ª ed, Intertext, London, 1980.

PHILLIPS, R. E., SCHMIDT, F. W. **Multigrid Techniques for the Numerical Solution of the Diffusion Equation.** **Numerical Heat Transfer.** v. 7, p. 251-268, 1984.

_____. **Multigrid Techniques for the Solution of the Passive Scalar Advection-Diffusion Equation.** **Numerical Heat Transfer.** v. 8, p. 25-43, 1989.

RAITHBY, G. D. Skew Upstream Differencing Scheme for Problems Involving Fluid Flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. V. 9, p. 153-164, 1976.

VAREJÃO, L. M. C. **Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer**. 1979. Tese de Doutorado, University of Minnesota/USA.

VAREJÃO, L. M. C., PATANKAR, S. V., KARKI, K. C. Flux-Spline Method for Convection-Diffusion Problems. **Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional**. p. 161-174, 1991A.

_____. Flux-Spline Method for Conduction-Type Problems. **Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional**. p. 175-184, 1991B.