CURVAS NODAIS MAXIMAIS VIA CURVAS DE FERMAT

Stanley Profilo

26 de janeiro de 2010

Universidade Federal do Espírito Santo

Programa de Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado

Vitória, Junho de 2009

[0] 2000 Mathematical Subject Classification: 14H45; 14H50.
[0] Palavras chaves: curvas algébricas, curvas duais, curvas racionais.

Profilo, Stanley, 1975
Curvas Nodais Maximais via Curvas de Fermat.[Vitória] 2009
xii, 52., 29,7 cm (UFES, M. Sc., Matemática, 2009)
Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo, PPGMAT.
I. Álgebra
I. PPGMAT/UFES II. Título

Curvas Nodais Maximais via Curvas de Fermat

Stanley Profilo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em :

José Gilvan de Oliveira

Silas Fantim

Valmecir Antonio dos Santos Bayer (Orientador)

Agradecimentos

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFES.
Ao meu orientador, Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

Sumário

1 Preliminares **11**
- 1.1 Curvas afins e curvas projetivas 11
- 1.2 Plano dual e curvas duais 14
- 1.3 Aplicações regulares e aplicações racionais 15
- 1.4 O gênero de um curva 16
- 1.5 Multiplicidade de intersecção de duas curvas em um ponto 18
- 1.6 Singularidades de curvas projetivas planas 20

2 Curvas nodais maximais **24**
- 2.1 A aplicação de Gauss e as curvas duais 24
- 2.2 A ação cíclica 26
- 2.3 Singularidades de curvas duais 32
- 2.4 Parametrizações de C e de $\check{C}$ 34
- 2.5 A geometria das curvas de Fermat 37
- 2.6 A geometria da curva dual $\check{\mathcal{F}}_n$ 43
- 2.7 Construção de curvas nodais maximais 44
- 2.8 Questões em aberto 49

Resumo

Estudamos curvas projetivas nodais racionais no plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ através das curvas de Fermat $\mathcal{F}_n : X^n + Y^n + Z^n = 0$. Utilizamos a teoria de curvas duais e um tipo especial de ação do grupo $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ sobre a curva de Fermat e sua dual para construir, para cada $n \geq 3$, uma curva plana nodal racional de grau $n - 1$. Uma curva plana nodal racional é uma curva projetiva plana racional (isto é, de gênero zero) que possui apenas singularidades do tipo nó. A referência básica é o trabalho de Matsuo OKA "*On Fermat Curves and Maximal Nodal Curves*" publicado em 2005 no periódico Michigan Math. Journal, v.53.

abstract

We study the rational projective nodal plane curves in the projective plane $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ by using the Fermat curve $\mathcal{F}_n : X^n+Y^n+Z^n = 0$. We deal with the theory of dual curves in the projective plane and a special type of group action of $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ on the Fermat curve and its dual to construct, for any positive integer $n \geq 3$, a rational nodal plane curve of degree equal to $n-1$. A rational nodal plane curve is a projective rational plane curve (that is, a genus zero curve) that presents as singularities only nodal points, that is, singularities of multiplicity two with distinct tangents. The basic reference is the paper "*On Fermat Curves and Maximal Nodal Curves*" by Matsuo OKA published in Michigan Math. Journal, v.53. in 2005.

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar curvas algébricas projetivas planas nodais racionais no plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ através das curvas de Fermat $\mathcal{F}_n : X^n + Y^n + Z^n = 0$, utilizando a teoria de curvas duais e um tipo especial de ação do grupo $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ sobre a curva de Fermat e sua dual.

Há uma analogia entre curvas algébricas planas projetivas nodais maximais e a seguinte propriedade de uma função polinomial real: Seja $y = f(x)$ uma função polinomial real, com coeficiente líder positivo, que possui n raízes reais distintas. Então esta função possui exatamente $[\frac{(n-1)}{2}]$ pontos de máximo e $(n-1)-[\frac{(n-1)}{2}]$ pontos de mínimo (onde $[x]$ denota a parte inteira de x). O matemático francês *René Thom* estudou em [8] o espaço das funções polinomiais reais e mostrou que qualquer função polinomial real pode ser deformada numa função polinomial especial que tem essa propriedade.

Para contextulizar o problema sobre as curvas racionais nodais começamos com um capítulo preliminar sobre curvas algébricas projetivas planas com foco no cálculo do seu gênero. Para fixar notações e tornar o trabalho o mais auto suficiente possível apresentamos conceitos bastante elementares de curvas algébricas planas.

Definimos o plano projetivo, curvas algébricas planas, o plano dual e curvas duais. Também definimos conjuntos algébricos no espaço afim n-dimensional para introduzir o contexto das aplicações racionais entre variedades algébricas, em especial, curvas. Observamos que o grau de uma curva não é invariante por aplicações birracionais. Definimos o gênero de uma curva e observamos que ele é invariante por aplicações birracionais. Apresentamos a fórmula de M. Noether para o gênero de uma curva C:

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in Sing(C)} \delta(P)$$

onde $n =$ grau da curva C e $\mathrm{Sing}(C)$ é o conjunto dos pontos singulares de C.

Precisamos compreender a contribuição $\delta(P)$ desta fórmula. Para isto estudamos a multiplicidade de intersecção de duas curvas. Definimos a multiplicidade de um ponto de uma curva algébrica plana. Os pontos singulares da curva são os pontos da curva que apresentam multiplicidade maior do que um. Isto pode ser caracterizado geometricamente pela propriedade: um ponto P de uma curva C é singular se toda reta que passa por P tem multiplicidade de intersecção com C em P maior do que um.

Sabemos que as curvas racionais são as curvas de gênero zero e que uma singularidade P do tipo nó contribue na fórmula do gênero com $\delta_P = 1$. Então, para termos uma curva racional de grau n cujas únicas singularidades são nós, devemos ter:

$$\text{número de nós } = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Note que para curvas de grau n este é o número máximo possível de nós. Se o gênero for diferente de zero a curva tem que possuir uma quantidade menor de nós. Estas curvas racionais acima são chamadas *curvas nodais maximais*. O objetivo desse trabalho é construir uma família infinita destas curvas de todos os graus maiores ou iguais a 2.

A estratégia para obter tais curvas é utilizar a aplicação de Gauss. Dada uma curva C, a aplicação de Gauss mapeia C sobre a sua dual $\check{C}$. As retas tangentes a C são transformadas em pontos em $\check{C}$.

A idéia central do trabalho é a seguinte. Partimos da curva de Fermat $\mathcal{F}_n : x^n + y^n + 1 = 0$ de grau n, tomamos a sua dual $\check{\mathcal{F}}_n$ e associamos então a esta dual uma curva nodal maximal D_{n-1} de grau $d_{n-1} = n - 1 \geq 2$.

Outra ferramenta fundamental para a obtenção da curva nodal maximal é a consideração de uma ação do grupo $\mathbb{Z}_{m,s} = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_s$, para $m, s \in \mathbb{N}$ no plano projetivo $\mathbb{P}^2$ que, no caso de $m = s = n$ deixa a curva de Fermat $\mathcal{F}_n$ e a sua dual $\check{\mathcal{F}}_n$ invariantes.

As retas bitangentes e multitangentes são ingredientes fundamentais para o entendimento geométrico da passagem da curva de Fermat para a sua dual. Uma reta é chamada de bitangente ou multitangente se ela for tangente em dois ou mais pontos respectivamente. As retas bitangentes a pontos não singulares de uma curva se transformam em uma singularidade nodal na sua dual pela aplicação de Gauss e uma reta multitangente (a pontos não singulares de uma curva) se transforma em uma singularidade ordinária da sua dual. Na nossa construção da curva nodal maximal partiremos da curva de Fermat $\mathcal{F}_n : x^n + y^n + 1 = 0$ e estudaremos as suas retas bitangentes que fornecerão as singularidades nodais da curva dual.

Finalmente, os pontos de inflexão também são objetos geométricos importantes. Um ponto não singular $P \in C$ é chamado um *ponto de inflexão*, de ordem de inflexão $k \geq 3$, se a reta tangente em P a C, T_P, intersecta C em P com multiplicidade de intersecção k. As curvas nodais maximais D_{n-1} que construiremos terão 3 pontos de inflexão com ordem de inflexão $n-1$ (exatamente igual ao grau da curva nodal maximal D_{n-1}).

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo vamos apresentar os conceitos e resultados sobre curvas algébricas projetivas planas que serão utilizadas nesta dissertação. As referências básicas são os textos [1], [2] e [9] .

1.1 Curvas afins e curvas projetivas

Sejam k um corpo e V um espaço vetorial sobre k. O *Espaço Projetivo* $\mathbb{P}^n(V)$ *associado* a V é o conjunto dos subespaços unidimensionais de V. Em particular se $V = k^{n+1}$, escreveremos $\mathbb{P}^n_k = \mathbb{P}^n(k)$, ou simplesmente $\mathbb{P}^n$. Quando $n = 1$ e $k = \mathbb{C}$, temos a *Reta Projetiva Complexa*, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Naturalmente o espaço projetivo é obtido definindo-se a relação de equivalência em $V - \{0\}$ que identifica dois vetores se um deles é múltiplo escalar não nulo do outro. No caso em que $V = k^{n+1}$ vamos denotar a classe de equivalência de um elemento não nulo $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ por $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ e dizemos que estas são as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n(k)$. Assim, no caso em que $n = 1$ e $k = \mathbb{C}$ temos,

$$(a : b) = \{\ (x, y) \in \mathbb{C}^{2^*};\ (x, y) = t(a, b),\ t \in \mathbb{C}^*\}.$$

No caso em que $n = 2$ e $k = \mathbb{C}$, temos $\mathbb{P}^2$ que chamamos de *Plano Projetivo Complexo.* No caso em que $V = k^{n+1}$ podemos ver k^n, que nesse caso chamamos de *espaço afim n-dimensional* e o denotamos por $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(k)$, da seguinte forma

$$\begin{array}{rcc} \phi : \mathbb{A}^n(k) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(k) \\ (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & (a_1 : \ldots : a_n : 1) \end{array}$$

O subconjunto $H = \{(a_1 : \ldots : a_n : 0) \in \mathbb{P}^n\}$ é o hiperplano dos *pontos infinitos* de $\mathbb{P}^n$. No caso de $\mathbb{P}^2$ usaremos a reta $L_\infty = \{(x : y : 0) \in \mathbb{P}^2\}$ para denotar a reta dos pontos do infinito e $\mathbb{A}^2 = \{(x : y : 1) \mid x, y \in k\}$ como sendo o plano afim ou o conjunto dos pontos finitos do plano projetivo $\mathbb{P}^2$.

Estaremos particularmente interessados em estudar curvas algébricas projetivas em $\mathbb{P}^2$ que passamos a descrever.

Sejam $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ polinômios em duas indeterminadas X e Y sobre $\mathbb{C}$. É fácil demonstrar (veja por exemplo [9], pag. 9) que $f(X, Y) = 0$ e $g(X, Y) = 0$ têm as mesmas soluções em $\mathbb{C}^2$ se, e somente se, os fatores irredutíveis de f e g são os mesmos. Assim, dois polinômios, sem fatores irredutíveis múltiplos, definem o mesmo conjunto de zeros em $\mathbb{C}^2$ se, e somente se, eles diferem por um múltiplo constante não nulo. Assim, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.1. *Uma **curva algébrica plana afim** ou, abreviadamente, **curva** é uma classe de equivalência de polinômios não constantes, que identifica dois polinômios se um deles é múltiplo constante não nulo do outro.*

A *equação* da curva é qualquer um dos polinômios da classe de equivalência que a define. O *grau* da curva é o grau de qualquer polinômio que a define. As curvas de grau $1, 2, 3$ e 4 são chamadas respectivamente de *retas*, *cônicas*, *cúbicas* e *quárticas*. Uma curva é *irredutível* se ela admite uma equação dada por um polinômio irredutível. As *componentes irredutíveis* de uma curva são as curvas definidas pelos fatores irredutíveis do polinômio que a define. Seja C uma curva definida por f. Um ponto $P = (a, b) \in C$ é um *ponto simples* ou *ponto não singular* ou *ponto regular* de C se vale

$$\frac{df}{dX}(a, b) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dY}(a, b) \neq 0.$$

Um ponto de C que não é ponto simples é dito ser um *ponto singular* ou uma *singularidade*. Assim, $P = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ é um ponto singular de C se, e somente se,

$$f(a, b) = \frac{df}{dX}(a, b) = \frac{df}{dY}(a, b) = 0.$$

Se $P = (a, b) \in C$ é um ponto regular, a *reta tangente* a C em P é a reta definida pela equação:

$$T_P : \frac{df}{dX}(P)(X - a) + \frac{df}{dY}(P)(Y - b) = 0.$$

Seja $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ um polinômio de grau d nas duas indeterminadas X e Y escrito como soma de componentes homogêneas, isto é, cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i, com $f_d \neq 0$. Considere a *homogeneização* de f, a saber, o polinômio homogêneo de grau d nas indeterminadas X, Y e Z obtido a partir de f da seguinte forma:

$$f^*(X, Y, Z) = f_0 Z^d + f_1(X, Y) Z^{d-1} + \cdots + f_d(X, Y).$$

Isto é,

$$f^*(X, Y, Z) = Z^d f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

O subconjunto $\{(x : y : z) \mid f^*(x, y, z) = 0\}$ de $\mathbb{P}^2$ claramente contém o conjunto de zeros de f em $\mathbb{C}^2$ quando olhamos $\mathbb{C}^2$ contido em $\mathbb{P}^2$ pela imersão $(x, y) \hookrightarrow (x : y : 1)$. Além disso, os pontos de $\mathbb{P}^2$ que estão no conjunto de zeros de f^* e que não estão no conjunto de zeros de f são exatamente os pontos infinitos de $\mathbb{P}^2$ que são zeros de f^*. Isto motiva a definição de curva projetiva da seguinte forma:

Definição 1.2. *Uma* ***curva plana projetiva*** *é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos não constantes, em três indeterminadas, que identifica dois polinômios quando um é múltiplo constante do outro.*

Os conceitos introduzidos para curvas afins são estendidos de forma natural para as curvas projetivas.

Um ponto de C que não é ponto simples é dito ser um *ponto singular* ou uma *singularidade.* Assim, $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ é um ponto singular de C se, e somente se,

$$F(a, b, c) = \frac{dF}{dX}(a, b, c) = \frac{dF}{dY}(a, b, c) = \frac{dF}{dZ}(a, b, c) = 0$$

É fácil ver que $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ é um ponto singular de C se, e somente se,

$$\frac{dF}{dX}(a, b, c) = \frac{dF}{dY}(a, b, c) = \frac{dF}{dZ}(a, b, c) = 0.$$

Se $P = (a : b : c) \in C$ é um ponto regular, a *reta tangente* a C em P é a reta (projetiva) definida pela equação:

$$T_P : X\frac{dF}{dX}(P) + Y\frac{dF}{dY}(P) + Z\frac{dF}{dZ}(P) = 0.$$

1.2 Plano dual e curvas duais

A geometria projetiva possui uma propriedade muito especial que é a *dualidade*. Nesta secção vamos explicar, no contexto do plano projetivo, como funciona este processo. Geometricamente, os elementos do *plano projetivo dual* são as retas do plano projetivo ordinário. Vamos precisar deste conceito para poder estudar a aplicação de Gauss. Dada uma reta L em $\mathbb{P}^2$, podemos descrevê-la por uma equação, a saber, $L : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, onde $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$. Assim, a cada equação $\{\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ fica identificado, a menos de múltiplo não nulo, de forma natural a trinca (α, β, γ) que portanto determina um ponto de $\mathbb{P}^2$. O *plano projetivo dual* é portanto,

$$\check{\mathbb{P}}^2 = \{(\alpha : \beta : \gamma) \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}.$$

Há uma aplicação natural entre $\mathbb{P}^2$ e $\check{\mathbb{P}}^2$ dado por

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \check{\mathbb{P}}^2. \\ & (a : b : c) & \mapsto & L : ax + by + cz = 0 \end{array}$$

Se k tem característica zero esta aplicação é um isomorfismo projetivo.

Considere uma curva algébrica projetiva plana C definida por uma equação homogênea $F = 0$ e $P \in C$ um ponto regular. Vemos que a reta tangente em P

$$T_P : F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z = 0$$

pode ser vista como um ponto no plano projetivo dual. Assim temos, de maneira natural, uma aplicação definida na parte regular de C, que denotamos por $\mathrm{Reg}(C)$:

$$\begin{array}{rccl} G_C : & \mathrm{Reg}(C) & \rightarrow & \check{\mathbb{P}}^2 \\ & P & \mapsto & (F_X(P) : F_Y(P) : F_Z(P)) \end{array}$$

O fecho de $G_C(\text{Reg}C)$ em $\check{P}^2$ (na topologia de Zariski) é chamada de *curva dual* de C. É possível demonstrar que de fato o fecho de $G_C(\text{Reg}C)$ é uma curva algébrica projetiva em $\check{\mathbb{P}}^2$.

1.3 Aplicações regulares e aplicações racionais

Os fatos básicos sobre variedades algébricas afins podem ser encontrados em [1].

Seja V uma variedade afim em $\mathbb{A}_k^n$ e $I(V)$ o seu ideal (primo). O anel quociente $k[V] = \frac{k[X_1,\ldots,X_n]}{I(V)}$ pode ser visto de maneira natural como um anel de funções com domínio V e contradomínio k. De fato, defina uma *função polinomial* em V como sendo uma função $\varphi : V \to k$ tal que existe um polinômio $G \in k[X_1,\ldots,X_n]$ satisfazendo $\varphi(P) = G(P)$ para todo $P \in V$. Assim, se dois polinômios $G, H \in k[X_1,\ldots,X_n]$ são tais que $\varphi(P) = G(P)$ e $\varphi(P) = H(P)$ para todo $P \in V$ então $G(P) - H(P) = 0$ para todo $P \in V$ e, portanto $G - H \in I(V)$. Assim, em $k[V]$, $\overline{G} = \overline{H}$. Desta forma, o anel das funções polinomiais em V é isomorfo a $k[V]$.

Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ e $W \subset \mathbb{A}^m$ conjuntos algébricos (em ambientes possivelmente distintos). Uma aplicação $\phi : V \to W$ é *polinomial* se existem m polinômios $G_1,\ldots,G_m \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tais que

$$\phi(P) = (G_1(P),\ldots,G_m(P)) \quad \text{para todo} \quad P \in V.$$

Neste caso dizemos também que ϕ é uma aplicação *regular* de V em W. Uma aplicação regular $\phi : V \to W$ induz um homomorfismo de anéis $\phi^* : k[W] \to k[V]$ definido por $\phi^*(\varphi) = \varphi \circ \phi$. Na verdade, todo $k-$homomorfismo de $k-$álgebra $\Psi : k[W] \to k[V]$ é da forma $\Psi = \phi^*$ para alguma aplicação regular $\phi : V \to W$. Assim, há uma equivalência entre a categoria de aplicações regulares de V em W e a categoria de $k-$homomorfismos de $k-$álgebras entre $k[W]$ e $k[V]$.

Seja V uma variedade afim, então $k[V]$ é um domínio. O *corpo de funções* de V é o corpo de frações de $k[V]$, e o denotamos por $k(V)$, isto é:

$$k(V) = \left\{ \frac{g}{h} \mid g, h \in k[V], h \neq 0 \right\}.$$

Se $\varphi = \frac{g}{h} \in k(V)$, então em princípio φ não é uma função, devido aos zeros de h. No entanto φ é bem definida em $P \in V$ sempre que $h(P) \neq 0$. Então φ está definida fora dos zeros de h que é um fechado de V. Logo o "domínio"de φ é um aberto de V. Fixado um ponto de $P \in V$, podemos olhar para o conjunto de todas estas "funções"que estão definidas em P. Isto nos leva à definição do *anel local* de P em V, a saber,

$$\mathcal{O}_{V,P} = \{\varphi \in k(V) \mid \varphi \text{ é regular em } P\}.$$

Naturalmente, temos que $k[V] \subset \mathcal{O}_{V,P} \subset k(V)$ para qualquer $P \in V$. Na verdade, vale:

$$k[V] = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{V,P}.$$

Uma aplicação $\phi : V \longrightarrow \mathbb{A}^n$ é uma *aplicação racional* se existem funções racionais $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tais que

$$\phi(P) = (\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P)) \quad \text{para todo} \quad P \in \bigcap \operatorname{dom}(\varphi_i).$$

Uma *aplicação racional* $\phi : V \longrightarrow W$ entre duas variedades $V \subset \mathbb{A}^n$ e $W \subset A^m$ é uma aplicação racional $\phi : V \longrightarrow \mathbb{A}^m$ tal que a imagem do domínio de ϕ esteja contido em W. Dizemos que uma aplicação racional $\phi : V \longrightarrow W$ é *bi-racional* se existe uma aplicação racional $\psi : W \longrightarrow V$ tal que $\phi \circ \psi = Id$ e $\psi \circ \phi = Id$ nos devidos domínios de definição.

No nosso trabalho podemos ver uma função bi-racional entre duas curvas algébricas do seguinte modo. Tome a curva C_1, e o conjunto D_1 igual a C_1 menos um número finito de pontos de C_1. Tome a curva C_2 e o conjunto D_2 igual a C_2 menos um número finito de pontos de C_2. Então uma função $f : C_1 \longrightarrow C_2$ é dita bi-racional se $f : D_1 \longrightarrow D_2$ for bijetora.

Temos o seguinte fato sobre funções birracionais de curvas algébricas planas:

Uma parametrização global de uma curva C é uma função bi-racional entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e C.

Uma função bi-racional entre uma reta e C é uma parametrização de C.

1.4 O gênero de um curva

No estudo de variedades algébricas muitos objetos são associados a ela com o objetivo de obter classificações. Na exposição feita acima por exemplo, foram definidos o anel das funções regulares, o corpo de funções, o anel local associado a um ponto. No caso de curvas temos o grau. Alguns objetos são invariantes por determinados tipos de transformações e outros não. O grau de uma curva algébrica plana afim é invariante por transformações afins de coordenadas mas não é invariante por aplicações bi-racionais, uma vez que toda cônica é bi-racionalmente equivalente a uma reta. No entanto uma cônica tem grau 2 e uma reta tem grau 1. Nesta dissertação estamos fundamentalmente interessados em estudar curvas que são racionais, isto é, curvas que são bi-racionalmente equivalentes a uma reta. Assim os objetos de destaques devem ser aqueles que são invariantes por aplicações bi-racionais. Duas variedades são bi-racionalmente equivalentes se, e somente se, possuem o mesmo corpo de funções racionais. Como Abel notou, o número de diferenciais de primeira espécie (também chamadas de 1-formas regulares) linearmente independentes sobre uma curva C é mais importante do que o grau, uma vez que é um invariante bi-racional. Este número é chamado de *gênero* de C e é denotado por $g(C)$. As curvas podem ser classificadas em três classes fundamentais, de acordo com o seu gênero.

1. $g(C) = 0$: curvas racionais.
2. $g(C) = 1$: curvas elípticas.
3. $g(C) \geq 2$: demais curvas.

No estudo de corpos de funções algébricas em uma variável (que são corpos de funções de curvas) há o teorema fundamental da teoria que é o *Teorema de Riemann-Roch*. Esse teorema permite calcular o gênero de uma curva por um caminho bastante árduo. Por outro lado, há uma fórmula do gênero dada por um teorema de M. Nöether que permite calcular o gênero a partir do grau da curva e de contribuições de suas singularidades. Assim para o cálculo efetivo, precisamos lançar mão de processos locais de dessingularização da curva que normalmente se utiliza explosões do anel local. Podemos dizer que esses processos são bi-racionais, uma vez que não há mudança no corpo de funções das curvas envolvidas. Por exemplo, é possível mostrar que toda curva algébrica possui um modelo plano (com mesmo corpo de funções) que tem como singularidades, no máximo pontos múltiplos ordinários. A partir daí torna-se mais fácil calcular a contribuição das singularidades (Veja [1]). A fórmula de M. Nöether nos diz que, para uma curva projetiva plana C de grau d, o seu gênero é:

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in C} \delta(P).$$

onde $\delta(P) = 0$ se P é um ponto regular da curva. Em particular, para uma curva projetiva plana não singular de grau d o seu gênero é

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Por exemplo, as retas (d =1) e as cônicas irredutíveis (d =2) têm gênero $g = 0$. As cúbicas não singulares têm gênero $g = 1$. Já as quárticas não singulares têm gênero $g = 3$. Não existe curva plana projetiva não singular com gênero $g = 2$.

1.5 Multiplicidade de intersecção de duas curvas em um ponto

Há duas formas clássicas de definir a multiplicidade de intersecção de duas curvas projetivas num ponto qualquer do plano projetivo. A primeira definição é via a codimensão do ideal gerado pelas equações das duas curvas no anel de polinômios localizado no ponto em estudo. Essa é a abordagem usada por W. Fulton [1]. A segunda utiliza a resultante dos dois polinômios. Nesta abordagem há um trabalho cuidadoso de escolher bem o sistema de coordenadas para perfazer os cálculos. Este é o caminho escolhido por I. Vainsencher [9] e Walker [10]. Estas duas definições naturalmente satisfazem os axiomas que determinam unicamente a multiplicidade de intersecção de curvas planas projetivas, que de fato, fornecem um algoritmo efetivo para a sua determinação. Listamos a seguir estes axiomas.

Dadas duas curvas algébricas planas projetivas $F = F(X, Y, Z)$ e $G = G(X, Y, Z)$ e um ponto P em $\mathbb{P}^2$ a multiplicidade de intersecção de F com G em P, que denotaremos por $I(F \cdot G, P)$, satisfaz os sete axiomas seguintes. Além disso, esses axiomas determinam $I(F \cdot G, P)$ univocamente.

1. $I(F \cdot G, P) = I(G \cdot F, P) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
2. $I(F \cdot G, P) = 0$ se, e somente se, $P \notin F \cap G$.

3. $I(F \cdot G, P) = \infty$ se, e somente se, P está numa componente comum de F e G.

4. Se $T : \mathbb{P}^2 \longmapsto \mathbb{P}^2$ é uma mudança projetiva de coordenadas então, $I(F \cdot G, P) = I(F^T \cdot G^T, T(P))$. Aqui F^T e G^T são as respectivas equações das curvas transformadas por T.

5. Se X, Y denotam os eixos coordenados afins $I(X \cdot Y, (0:0:1)) = 1$.

6. $I(F \cdot (G + AF), P) = I(F \cdot G, P)$ para todo $A \in K[X, Y, Z]$ homogêneo satisfazendo grau(A) = grau(G) - grau(F).

7. $I(F \cdot G_1G_2, P) = I(F \cdot G_1, P) + I(F \cdot G_2, P)$.

Dada uma curva plana projetiva C com equação F e P um ponto não singular de C, vamos denotar a reta tangente a C em P por T_P. Neste caso, T_P é a única reta de $\mathbb{P}^2$ que tem multiplicidade de intersecção maior do que 1 com C em P, isto é, $I(F \cdot T_P, P) \geq 2$.

Se $I(C \cdot T_P, P) \geq 3$, dizemos que P é um *ponto de inflexão* de C e, neste caso, dizemos que T_P é uma *reta tangente inflexional.*

Se $I(C \cdot T_P, P) = 3$ dizemos que P é um *ponto de inflexão ordinário.*

Observamos que um ponto de inflexão é um ponto não singular. Naturalmente se $P \in C$ é um ponto singular de C então, para qualquer reta L passando por P, temos que $I(C \cdot L, P) \geq 2$.

Sejam C e D curvas planas projetivas e $P \in C \cap D$. Então

$$I(C \cdot D, P) \geq \text{mult}_P(C) \cdot \text{mult}_P(D).$$

Vale a igualdade se, e somente se, as tangentes de C em P forem todas distintas das tangentes a D em P.

Observe que no Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibnitz os pontos de inflexão de uma curva dada pelo gráfico de uma função são aqueles pontos onde a segunda derivada muda de sinal. Geometricamente isto significa que a concavidade da curva muda. No contexto da geometria algébrica, para curvas dadas por gráficos de funções, os pontos de inflexão são pontos onde a segunda derivada se anula. Por exemplo, $P = (0, 0)$ é um ponto de inflexão de $y = x^3$ em ambos os contextos, mas é ponto de inflexão de $y = x^4$ apenas no contexto da geometria algébrica.

1.6 Singularidades de curvas projetivas planas

Um ponto P é *ponto singular* de uma curva projetiva plana C se sua multiplicidade é maior do que um. Isto pode ser caracterizado em termos de multiplicidades de intersecção da curva com retas por P, a saber, P é ponto singular de C se, e somente se $I(C \cdot L, P) \geq 2$ para toda reta L que passa por P. No estudo da geometria da curva C o entendimento dos seus pontos singulares é crucial. A teoria de classificação de singularidades de curvas algébricas é um assunto clássico e extenso que apresenta questões em aberto até hoje.

O estudo de uma singularidade P de uma variedade algébrica é feito lançando mão do anel local em P e, mais exatamente falando, do completamento desse anel local. Vamos descrever estes objetos suscintamente. O anel local de uma variedade V em P que já definimos na secção 1.3 pode ser obtido algebricamente localizando o anel de coordenadas de V (ou anel das funções regulares de V) no ideal das funções que se anulam em P. Vamos nos restringir ao caso de curvas. Vamos também supor que $P = (0, 0)$. Assim se $f = f(X, Y) \in k[X, Y]$ é uma equação (irredutível) para a curva C, o seu anel de coordenadas é $\Gamma(C) = \frac{k[X,Y]}{(f)}$, onde (f) é o ideal gerado por f em $k[X, Y]$. O anel local de C em P é

$$\Gamma(C)_P = \left(\frac{k[X, Y]}{(f)}\right)_P = \left\{\frac{f}{g} \mid f, g \in k[x, y]\ ,\ g(P) \neq 0\right\},$$

onde estamos representando por x, y as respectivas classes de X, Y em $\Gamma(C)$, isto é, $x = X + fk[X, Y]$ e $y = Y + fk[X, Y]$.

Naturalmente, $\Gamma(C)_P \subset k(x, y)$, onde $k(x, y)$ é o corpo de funções de C. O anel local de C em P não possui todas as propriedades que precisamos para estudar a singularidade. Para isso precisamos passar para o seu completamento, que neste caso é o anel das séries formais em x e y sobre k. Vamos denotar esse completamento por $\mathcal{O}_P$. Assim

$$\mathcal{O}_P = k[[x, y]] = \frac{k[[X, Y]]}{(f)}.$$

Vamos descrever algumas das propriedades fundamentais do anel $k[[X, Y]]$ que serão necessários para compreender bem a singularidade P. Paralelamente ao estudo das curvas algébricas através de equações $f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$, as séries de potências em $\mathbb{C}[[X, Y]]$ definem, localmente, objetos geométricos que classicamente são chamados de *germes* de curvas planas complexas. No caso de um corpo k qualquer, denominaremos um tal "objeto geométrico"por *curva algebróide*. Assim, uma curva algebróide é uma classe de equivalência de elementos de $k[[X, Y]]$ definida pela relação de equivalência que identifica dois elementos se eles diferem por um múltiplo inversível, que é uma série com termo constante não nulo.

Usaremos a referência A. Hefez [2] para a fundamentação e definições dos objetos que usaremos na seqüência dessa seção.

Exemplo 1.1. *Seja C a curva definida por*

$$f(X, Y) = Y^m + X^n \in \mathbb{C}[X, Y],$$

onde $2 \leq m < n$ *e* $MDC(m, n) = d > 1$.

Olhando em $\mathbb{C}[[X, Y]]$, observamos que f se fatora da forma seguinte. Escreva $m = \eta d$ e $n = \lambda d$, onde $MDC(\eta, \lambda) = 1$ e $0 \leq \eta < \lambda$. Então,

$$Y^m + X^n = (Y^\eta)^d + (X^\lambda)^d = \prod_{j=0}^{d-1} (Y^\eta - \omega_j X^\lambda)$$

onde

$$\omega_j = \cos\left(\frac{1+2j}{d}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1+2j}{d}\pi\right) \in \mathbb{C},\ i^2 = -1 \text{ e } j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Assim, C tem d ramos em $P = (0, 0)$, todos topologicamente equivalentes a $f_0 = Y^\eta - X^\lambda$ e com a mesma tangente Y. Para cada $j = 0, 1, 2, \ldots, d-1$ denote $f_j = Y^\eta - \omega_j X^\lambda$. Assim, o condutor do semigrupo de valores associado a f_j é

$$c_j = (\eta - 1)(\lambda - 1).$$

Usando a caracterização axiomática da multiplicidade de intersecção, é fácil ver que para cada $j \neq l$ tem-se,

$$I(f_j, f_l) = \eta \cdot \lambda.$$

Portanto, temos que

$$\delta_P = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{c_j}{2} + \sum_{0 \leq j < l \leq d-1} I(f_j, f_l).$$

Isto é,

$$\delta_P = d \cdot \frac{(\eta-1)(\lambda-1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} \cdot \eta\lambda.$$

Retornando para m e n, obtemos

$$\delta_P = \frac{1}{2}\left[(m-1)(n-1)+d-1\right].$$

Lembrando que o número de Milnor é $\mu(P) = 2\delta(P) - d + 1$, já que d é o número de ramos, obtemos

$$\mu(P) = (m-1)(n-1).$$

Compare este resultado com o número de Milnor para o caso de um único ramo!

Por outro lado, para nossos propósitos nesta dissertação, precisamos compreender um tipo especial de singularidade, a saber, a singularidade que a curva $B^h_{n,m}$ definida pelo polinômio

$$g_h(X,Y) = X^n - Y^m + h(X,Y)$$

apresenta em $(0,0)$. Aqui estamos assumindo que $h(X,Y)$ tenha forma inicial com grau maior do que $\max\{n,m\}$. Naturalmente podemos supor que $m \leq n$.

Lema 1.1. *Para cada $m,n \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \leq n$, a curva $B^h_{n,m}$ definida acima é topologicamente equivalente à curva $B_{n,m}$ que é definida por $g(X,Y) = X^n - Y^m$.*

Demonstração: *Caso 1*: $m = n$.

Neste caso $g_h(X,Y) = X^n - Y^n + h(X,Y)$. Então a forma de menor grau de $g_h(X,Y)$ é $X^n - Y^n$ que se fatora em um produto de n fatores lineares distintos, a saber,

$$X^n - Y^n = \prod_{j=0}^{n-1}(X - \omega^j Y),$$

onde ω é uma raiz $n-$ésima primitiva de 1. Assim, pelo Lema de Hensel (Veja Hefez [2]), $g_h(X,Y)$ se fatora em n fatores distintos de ordem 1 no anel $k[[X,Y]]$. Logo $B^h_{n,n}$ tem uma singularidade ordinária em $(0,0)$, o mesmo ocorrendo com $B_{n,n}$. Portanto elas são topologicamente equivalentes.

Caso 2: $m < n$ e $MDC(m, n) = 1$.

Neste caso, observando a sequência de explosões de $g_h(X, Y)$ e a sequência de explosões de $X^n - Y^m$, vemos que as sequências de multiplicidades delas coincidem. Portanto elas são topologicamente equivalentes. Observe que, em particular $B^h_{n,m}$ possui um único ramo em $(0, 0)$, uma vez que $X^n - Y^m$ possui um único ramo em $(0, 0)$.

Caso 3: $m < n$ e $MDC(m, n) = d > 1$.

Neste caso, podemos considerar, de maneira análoga ao caso 2, a sequência de explosões de ambas as curvas. Vemos que ambas possuem a mesma árvore de explosões. Portanto elas são topologicamente equivalentes. Para descrever mais explicitamente a classe de equissingularidade delas, vamos observar a fatoração de $X^n - Y^m$. Escreva $n = \lambda d$ e $m = \mu d$, com $MDC(\lambda, \mu) = 1$. Então $X^n - Y^m$ se fatora da seguinte forma:

$$X^n - Y^m = \prod_{j=0}^{d-1} (X^\lambda - \xi^j Y^\mu),$$

com ξ uma raiz $d-$ésima primitiva de 1. Os fatores $X^\lambda - \xi^j Y^\mu$ são irredutíveis em $k[[X, Y]]$. Assim a singularidade $B_{n,m}$ possui d ramos. Eles possuem uma mesma tangente, mas a multiplicidade de intersecção entre dois quaisquer deles, distintos entre si, é igual a $\lambda\mu$. Então a classe de equissingularidade da singularidade $B_{n,m}$ fica perfeitamente determinada.

Capítulo 2

Curvas nodais maximais

2.1 A aplicação de Gauss e as curvas duais

Considere uma curva plana projetiva irredutível C de grau n definida por $F(X, Y, Z) = 0$. Vamos denotar por $f(x, y) = 0$ a equação afim de C. Podemos pensar que $x = \frac{X}{Z}$ e $y = \frac{Y}{Z}$. Assim,

$$F(X, Y, Z) = Z^n f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}) = Z^n f(x, y).$$

Num ponto não singular $P = (a : b : c) \in C$ a *reta tangente* é definida por

$$F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z = 0,$$

onde F_X, F_Y, F_Z são as derivadas parciais em relação às variáveis correspondentes.

O plano projetivo dual de $\mathbb{P}^2$ é construído da forma seguinte.

Seja $L : aX + bY + cZ = 0$ em $\mathbb{P}^2$. A terna (a: b: c) é determinado por L a menos de múltiplo constante não nulo. Assim, a correspondência

$$\begin{array}{ccc} \{\text{retas de } \mathbb{P}^2\} & \to & \mathbb{P}^2 \\ L & \mapsto & (a : b : c) \end{array}$$

é uma bijeção. Se $P \in \mathbb{P}^2$, então seja P^* a reta correspondente. Se L é uma reta de $\mathbb{P}^2$, denote por L^* o ponto correspondente no dual de $\mathbb{P}^2$. Então $P^{**} = P$ e $L^{**} = L$. Além disso, $P \in L$ se, e somente se, $L^* \in P^*$. O conjunto das retas de $\mathbb{P}^2$ é chamado de *plano dual de* $\mathbb{P}^2$ e é denotado por $\check{\mathbb{P}}^2$.

Vamos utilizar as coordenadas (homogêneas) duais U, V, W para o plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$, e vamos considerar $W \neq 0$ o seu plano afim que vai ser, portanto, considerado com coordenadas afins u, v onde, podemos pensar $u = \frac{U}{W}$ e $v = \frac{V}{W}$.

A *aplicação de Gauss* associada à curva C é definida por

$$\begin{array}{rccl} G_F: & C & \longrightarrow & \check{\mathbb{P}}^2 \\ & P & \mapsto & (F_X(P) : F_Y(P) : F_Z(P)). \end{array}$$

Podemos também usar a notação G_f no lugar de G_F quando trabalhamos no plano afim.

Vamos explicitar a expressão para $G_f(P)$.

Observe que $F(X, Y, Z) = Z^n f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$. Então

$$\begin{array}{rcl} F_X & = & f_X \cdot \frac{1}{Z} \cdot Z^n = Z^{n-1} f_X, \\ F_Y & = & f_Y \cdot \frac{1}{Z} \cdot Z^n = Z^{n-1} f_Y, \\ F_Z & = & Z^n[f_X \cdot X(-1)Z^{-2} + f_Y \cdot Y(-1)Z^{-2}] + f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}) \cdot nZ^{n-1} \\ & = & Z^{n-2}[-f_X \cdot X - f_Y \cdot Y]. \end{array}$$

Observando que $f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}) = 0$, uma vez que $P \in C$. Para coordenadas afins fazemos $Z = 1$ e temos portanto

$$G_f(P) = (f_x(P) : f_y(P) : -x \cdot f_x(P) - y \cdot f_y(P)).$$

Assim, se $P = (x, y) \in C$ temos

$$G_f(P) = (f_x(x, y) : f_y(x, y) : -x \cdot f_x(x, y) - y \cdot f_y(x, y)).$$

A imagem de C pela aplicação de Gauss é novamente uma curva projetiva plana, chamada *curva dual* de C, que denotaremos por $\check{C}$.

Há uma fórmula clássica que relaciona o grau n de C com o grau $\check{n}$ de sua dual $\check{C}$ (Veja [4]):

$$\check{n} = n(n-1) - \sum_{P \in Sing(C)} (\mu(P) + m_P - 1), \tag{2.1}$$

onde $Sing(C)$ é o lugar dos pontos singulares de C, $\mu(P)$ é o número de Milnor da singularidade P e m_P é a multiplicidade de P em C. Quando C é não singular, $\check{n} = n(n-1)$.

2.2 A ação cíclica

Nesta seção vamos fazer uma teoria geral de uma ação cíclica sobre certas curvas planas projetivas complexas pelo grupo $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_s$, onde $m, s \in \mathbb{N}$, no entanto, na seqüencia do trabalho precisaremos do caso especial em que $m = s = n$ onde n é o grau da curva de Fermat.

Como na seção anterior, seja $f(x, y) = 0$ uma equação afim da curva C. Suponhamos que exista um polinômio $g(x, y)$ tal que $f(x, y) = g(x^m, y^s)$ para os números naturais $m, s \geq 2$. Consideremos a **ação** em $\mathbb{P}^2$ do grupo $\mathbb{Z}_{m,s} := \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_s$ definida como segue. Para $l \in \mathbb{N}$, denote por ω_l a l-ésima raiz da unidade

$$\omega_l := \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{l}\right) = e^{\left(\frac{2\pi i}{l}\right)},$$

e considere o conjunto $\{\omega_l = \omega_l^1, \omega_l^2, \ldots, \omega_l^l\}$ que tem estrutura de grupo multiplicativo, sendo que $\omega_l^l = 1$ é o seu elemento neutro e ω_l^{l-j} é o inverso de ω_l^j. Este grupo, que é um subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^*$ gerado por ω_l, tem ordem l e é naturalmente identificado com o grupo cíclico $\mathbb{Z}_l = \frac{\mathbb{Z}}{l\mathbb{Z}}$. A ação é então definida por

$$\begin{array}{cccccc} \Psi : & \mathbb{Z}_{m,s} & \times & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2. \\ & ((\omega_m^j, \omega_s^k) & , & (X : Y : Z)) & \longmapsto & (X\omega_m^j : Y\omega_s^k : Z) \end{array}$$

Lema 2.1. *Se $D : h(u, v) = 0$ é invariante pela ação Ψ então h é da forma $h(u, v) = \sum_{i,j} h_{i,j} u^{im} v^{js}$.*

Demonstração: Faremos por contrapositiva. Suponhamos que

$$h(u, v) = \sum_{i,j} h_{i,j} u^{im} v^{js} + h_{a,b} u^a v^b \text{ com } m \not| a \text{ ou } s \not| b.$$

Então temos,

$$\begin{aligned} h(u\omega_m, v\omega_s) &= \textstyle\sum_{i,j} h_{i,j} (u\omega_m)^{im} (v\omega_s)^{js} + h_a, b(u\omega_m)^a (v\omega_s)^b = \\ &= \textstyle\sum_{i,j} h_{i,j} u^{im} v^{js} + h_{a,b} (u\omega_m)^a (v\omega_s)^b. \end{aligned}$$

Assim,

$$h(u, v) - h(u\omega_m, v\omega_s) = h_{a,b} u^a v^b - h_{a,b} (u\omega_m)^a (v\omega_s)^b \neq 0,$$

logo $h(u\omega_m, v\omega_s) \neq h(u, v) = 0$ e, portanto D não é invariante pela a ação Ψ.

Teorema 2.1. *Seja $C : f(x, y) = 0$ uma curva algébrica plana afim. Suponha que exista um polinômio $g(x, y)$ tal que $f(x, y) = g(x^m, y^s)$. Então a curva dual $\check{C}$ é invariante pela ação Ψ definida acima. Segue que existe um polinômio $h(u, v) \in \mathbb{C}[X, Y]$ tal que $\check{f}(u, v) = h(u^m, v^s)$.*

Demonstração: Seja $\check{f}(u, v)$ o polinômio que define a curva dual $\check{C}$. Sejam também $P = (x, y) \in C$ e $(\omega_m^j, \omega_s^k) \in \mathbb{Z}_{m,s}$. Defina, de maneira análoga, a ação de $\mathbb{Z}_{m,s}$ no plano dual:

$$\check{\Psi}((\omega_m^j, \omega_s^k), (U : V : W)) = (U\omega_m^j : V\omega_s^k : W).$$

Lembremos que

$$G_f(P) = (f_x(P) : f_y(P) : -xf_x(P) - yf_y(p))$$

e

$$f(x, y) = g(x^m, y^s),$$

então,

$$f_x(P) = mx^{m-1}g_x(P), \qquad f_y(P) = sy^{s-1}g_y(P)$$

e

$$\begin{aligned} -xf_x(P) - yf_y(P) &= -x[mx^{m-1}g_x(P)] - y[sy^{s-1}g_y(P)] \\ &= -mx^m g_x(p) - sy^s g_y(P). \end{aligned}$$

Assim,

$$G_f(P) = (mx^{m-1}g_x(P) : sy^{s-1}g_y(P) : -mx^m g_x(P) - sy^s g_y(P))$$

Mas,

$$\begin{aligned} G_f(\Psi((\omega_m^j, \omega_s^k), (X : Y : Z)) = (m(\omega_m^j x)^{m-1} g_X(P) : \\ : s(\omega_s^k y)^{s-1} g_y(P) : -mx^m g_x(P) - sy^s g_y(P)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Chamando de $(a : b : c)$ a última expressão acima e, como (ω_m^j, ω_s^k) tem inverso $(\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k})$ temos,

$$\Psi((\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}), (a:b:c)) =$$

$$= \Psi((\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}), (mx^{m-1}g_x(P) : sy^{s-1}g_y(P) :$$

$$: -mx^m g_x(P) - sy^s g_y(P)) =$$

$$= (\omega_m^{m-j} mx^{m-1} g_x(P) : \omega_s^{s-k} sy^{s-1} g_y(P) :$$

$$: -mx^m g_x(P) - sy^s g_y(P)). \tag{2.3}$$

Sabendo-se que

$$(\omega_m^j)^{m-1} = \omega_m^{mj-j} = \omega_m^{jm}\omega_m^{-j} = 1\omega_m^{-j} = \omega_m^{m-j}$$

e

$$(\omega_s^k)^{s-1} = \omega_s^{ks-k} = \omega_s^{ks}\omega_s^{-k} = 1\omega_s^{-k} = \omega_s^{s-k},$$

a equação 2.3 torna-se,

$$\Psi((\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}), (a:b:c)) = (m(\omega_m^j x)^{m-1} g_x(P) :$$

$$: s(\omega_s^k y)^{s-1} g_y(P) : -mx^m g_x(P) - sy^s g_y(P)). \tag{2.4}$$

Observe que 2.4 coincide com 2.2 logo,

$$\begin{aligned} G_f(\Psi(\omega_m^j, \omega_s^k), (X:Y:Z)) &= \Psi(\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}, G_f(P)) = \\ &= \Psi(\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}, (a:b:c)). \end{aligned}$$

Explicamos a expressão

$$\Psi((\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}), G_f(P)) = G_f(\Psi(\omega_m^j, \omega_s^k), (X:Y:Z)) :$$

ao aplicarmos Ψ com $(\omega_m^{m-j}, \omega_s^{s-k}) \in \mathbb{Z}_{m,s}$ e $G_f(P)$ um ponto da curva dual do lado esquerdo obtemos um outro ponto de $G_f(Q)$, a saber: $Q = \Psi((\omega_m^j, \omega_s^k), (X:Y:Z))$ do lado direito, ou seja outro ponto da curva dual. Assim a curva dual é invariante pela ação de Ψ. ∎

Note que $h(u, v)$ não é o polinômio definido pela curva dual de $g(x, y) = 0$ em geral. Entretanto, temos o seguinte resultado fundamental.

Fixados $m, s \in \mathbb{N}$ como acima definimos as aplicações

$$\pi_{m,s} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \quad \text{e} \quad \check{\pi}_{m,s} : \check{\mathbb{P}}^2 : \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$$

por

$$\begin{aligned} \pi_{m,s}(X : Y : Z) &= (X^m : Y^s Z^{m-s} : Z^m) \\ \check{\pi}_{m,s}(U : V : W) &= (U^m : V^s W^{m-s} : W^m) \end{aligned}$$

ou, em coordenadas afins:

$$\pi_{m,s}(x, y) = (x^m, y^s) \quad \text{e} \quad \check{\pi}_{m,s}(u, v) = (u^m, v^s).$$

Lema 2.2. *Seguindo as mesmas notações acima, temos*

$$\begin{aligned} \pi_{m,s}(\Psi((\omega_m^j, \omega_s^k), (x, y))) &= \pi_{m,s}(x, y) \\ \check{\pi}_{m,s}(\Psi((\omega_m^j, \omega_s^k), (u, v))) &= \check{\pi}_{m,s}(u, v). \end{aligned}$$

Demonstração: Como a aplicação $\Psi : \mathbb{Z}_{m,s} \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ é uma ação em $\mathbb{P}^2$ ela determina uma relação de equivalência em $\mathbb{P}^2$ cujas classes de equivalência são suas órbitas. Isto significa que $(X : Y : Z) \sim (X_1 : Y_1 : Z_1)$ se existe $(\omega_m^j, \omega_s^k) \in \mathbb{Z}_{m,s}$ tal que $(X_1 : Y_1 : Z_1) = \Psi((\omega_m^j, \omega_s^k), (X : Y : Z)$. Ora, claramente $\pi_{m,s}$ e $\check{\pi}_{m,s}$ deixam as classes de equivalência invariantes. ∎

Como observamos acima, em geral $h(u, v)$ não é o polinômio definido pela curva dual de $g(x, y) = 0$, mas naturalmente há uma ligação entre h e g que destacamos a seguir. Na demonstração do teorema obtemos uma fórmula para parametrização da curva dual.

Teorema 2.2. *(Teorema da Birracionalidade) Sejam $g(X, Y)$ e $h(X, Y)$ polinômios em $\mathbb{C}[X, Y]$ e as curvas $C_g : g(x, y) = 0$ e $C_h : h(u, v) = 0$ definidas por eles. Então existe uma aplicação bi-racional canônica*

$$\Phi_{m,s} : C_g \longrightarrow C_h.$$

Demonstração: A aplicação de Gauss $G_f : C \longrightarrow \check{C}$ é uma aplicação bi-racional cuja inversa é $G_{\check{f}} : \check{C} \longrightarrow C$ uma vez que C não é uma reta (lembre-se que $car(\mathbb{C}) = 0$). Considere as aplicações

$\pi_{m,s} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ e $\check{\pi}_{m,s} : \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ definidas anteriormente. Por definição, as restrições $\pi_{m,s}|_C$ e $\check{\pi}_{m,s}|_{\check{C}}$ definem aplicações sobrejetivas (que denotaremos com os mesmos nomes) $\pi_{m,s} : C \longrightarrow C(g)$ e $\check{\pi}_{m,s} : \check{C} \longrightarrow C(h)$. Como

$$\begin{aligned} \pi_{m,s}(\Psi((\omega_m^j, \omega_k^s)(x,y))) &= \pi_{m,s}(x,y) \\ \text{e} \quad \check{\pi}_{m,s}(\Psi(\omega_m^j, \omega_s^k)(u,v))) &= \check{\pi}_{m,s}(u,v) \end{aligned}$$

para algum $(\omega_m^j, \omega_s^k) \in \mathbb{Z}_{m,s}$, podemos identificar $\pi_{m,s}$ e $\check{\pi}_{m,s}$ com a aplicação quociente sob a ação $\mathbb{Z}_{m,s}$ respectiva. Vamos considerar uma seção de $\pi_{m,s}$:

$$\begin{aligned} \lambda : C(g) &\longrightarrow C. \\ (x,y) &\mapsto (x^{\frac{1}{m}}, y^{\frac{1}{s}}) \end{aligned}$$

Pelas considerações anteriores vemos que a composição

$$\Phi_{m,s} := \check{\pi}_{m,s} \circ G_f \circ \lambda : C(g) \longrightarrow C(h)$$

é uma aplicação racional bem definida que não depende da escolha da secção λ (isto é, não depende da escolha dos ramos $x^{\frac{1}{m}}, y^{\frac{1}{s}}$). De fato, vamos calcular a expressão de $\Phi_{m,s}(x,y)$. Temos $\lambda : C(g) \longrightarrow C$, $G_f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ e $\check{\pi}_{m,s} : \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$. Ora, $\lambda(x,y) = (x^{\frac{1}{m}}, y^{\frac{1}{s}})$. Lembrando que

$$G_f(P) = (f_x(P) : f_y(P) : -xf_x(P) - yf_y(P)),$$

podemos dividir pela terceira coordenada para obtermos a expressão em coordenadas afins, chegamos a

$$G_f(P) = \left(\frac{f_x(P)}{-xf_x(P) - yf_y(P)}, \frac{f_y(P)}{-xf_x(P) - yf_y(P)} \right).$$

Observe que pelo teorema anterior $f(x,y) = g(x^m, y^s)$ para algum g, então

$$f_x(P) = mx^{m-1} g_x(P), \quad f_y(P) = sy^{s-1} g_y(P)$$

e

$$\begin{aligned} -xf_x(P) - yf_y(P) &= -xmx^{m-1} g_x(P) - ysy^{s-1} g_y(P)) \\ &= -mx^m g_x(P) - sy^s g_y(P). \end{aligned}$$

Portanto, $G_f(\lambda(x,y)) = G_f(x^{\frac{1}{m}}, y^{\frac{1}{s}}) =$

$$= \left(\frac{m(x^{\frac{1}{m}})^{m-1} g_x(x,y)}{-m(x^{\frac{1}{m}})^m g_x(x,y) - s(y^{\frac{1}{s}})^s g_y(x,y)} \ , \ \frac{s(y^{\frac{1}{s}})^{s-1} g_y(x,y)}{-m(x^{\frac{1}{m}})^m g_x(x,y) - s(y^{\frac{1}{s}})^s g_y(x,y)} \right).$$

Agora lembrando que $\breve{\pi}_{m,s}(u,v) = (u^m, v^s)$ teremos,

$$\breve{\pi}_{m,s} \circ G_f \circ \lambda(x,y) = (\alpha, \beta) \tag{2.5}$$

onde,

$$(\alpha,\beta) = \left(\frac{m^m x^{m-1} g_x^m(x,y)}{(-mxg_x(x,y) - syg_y(x,y))^m}, \frac{s^s y^{s-1} g_y^s(x,y)}{(-mxg_x(x,y) - syg_y(x,y))^s} \right).$$

Então a composição é dada por

$$\Phi_{m,s}(x,y) = \left(\frac{m^m x^{m-1} g_x^m(x,y)}{(-mxg_x(x,y) - syg_y(x,y))^m} \ , \ \frac{s^s y^{s-1} g_y^s(x,y)}{(-mxg_x(x,y) - syg_y(x,y))^s} \right).$$

(esta é a fórmula que fornece a parametrização da curva dual).

Similarmente consideramos uma seção de $\breve{\pi}_{m,s}$,

$$\begin{array}{rcl} \check{\lambda} : \mathbb{C}_h & \longrightarrow & C \\ (u,v) & \mapsto & (u^{\frac{1}{m}}, v^{\frac{1}{s}}) \end{array}$$

e a composição $\Psi_{m,s} = \pi_{m,s} \circ G_{\check{f}} \circ \check{\lambda} : C(h) \longrightarrow C(g)$,

$$\Psi_{m,s}(u,v) =$$

$$= \left(\frac{m^m u^{m-1} (h_u(u,v))^m}{(-muh_u(u,v) - svh_v(u,v))^m} \ , \ \frac{s^s v^{s-1} (h_v(u,v))^s}{(-muh_u(u,v) - svh_v(u,v))^s} \right).$$

Agora vamos provar que $\Phi_{m,s}$ e $\Psi_{m,s}$ satisfazem

$$\Psi_{m,s} \circ \Phi_{m,s} = id_{C(g)} \quad \text{e} \quad \Phi_{m,s} \circ \Psi_{m,s} = id_{C(h)}.$$

De fato, como temos que $\check{\lambda} \circ \breve{\pi}_{m,s} = id$, $G_{\check{f}} \circ G_f = id$ e que $\pi \circ \lambda = id$ obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{m,s} \circ \Phi_{m,s} &= (\pi_{m,s} \circ G_{\check{f}} \circ \check{\lambda})(\breve{\pi}_{m,s} \circ G_f \circ \lambda) = \\ &= (\pi_{m,s} \circ G_{\check{f}})(G_f \circ \lambda) = \pi \circ \lambda = id_{C(g)}. \end{aligned}$$

A igualdade $\Phi_{m,s} \circ \Psi_{m,s} = id_{C(h)}$ é mostrada exatamente do mesmo modo. ■

Assim temos um diagrama comutativo onde as aplicações horizontais são birracionais:

$$\begin{array}{ccc} C : f(x,y) = 0 & \overset{G_f}{\longrightarrow} & \check{C} : \check{f}(u,v) = 0 \\ \pi_{m,s} \downarrow & & \downarrow \check{\pi}_{m,s} \\ C(g) : g(x,y) = 0 & \underset{\Phi_{m,s}}{\longrightarrow} & C(h) : h(u,v) = 0. \end{array}$$

2.3 Singularidades de curvas duais

Precisamos relacionar as singularidades de uma curva com as singularidades de sua dual. Neste tópico utilizaremos os resultados do trabalho de M. Oka: *Geometry of cuspidal sextics and their dual curves* (Veja [5]). No entanto vamos destacar algumas propriedades básicas das curvas duais para uma boa compreensão do leitor.

As singularidades das curvas duais, tendo em vista as singularidades da curva original, são de um dos tipos seguintes:

I - Singularidades provenientes de pontos singulares de C.

Suponhamos que P seja um ponto singular de C. Então naturalmente $G_f(P)$ é um ponto singular de $\check{C}$. (Cuidado, é preciso olhar para o fecho da imagem da aplicação de Gauss). Um caso especial é quando a classe de equivalência topológica de P é a classe de $B_{k,k-1}(= Y^{k-1} + X^k)$, para $k \geq 3$ ou $B_{k,k}(= Y^k + X^k)$ para $k \geq 2$, que discutimos nos exemplos anteriormente. A imagem pela aplicação de Gauss de P é um ponto de inflexão com ordem de inflexão k. No caso geral, se P é uma singularidade que tem um cone tangente com ν retas distintas então a imagem de P (pela aplicação de Gauss) é transformada em ν germes distintos (em pontos distintos). A proposição seguinte pode ser encontrada em [5].

Proposição 2.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ primos entre si e $2 \leq m < n$. A singularidade dual proveniente de uma singularidade do tipo topológico de $B_{n,m}$ é topologicamente equivalente a uma singularidade do tipo $B_{n,n-m}$.*

Observação 4: Nesta proposição a ordem da série de Puiseux de $B_{n,m}$ é $\beta = \frac{n}{m}$.

Relembrando que um ponto regular P de C é um ponto de inflexão, com ordem de inflexão $k \geq 3$ se a reta tangente T_P em P intersecta C com multiplicidade de intersecção k. Assim, na nossa notação, o germe

$$B_{k,1} : \; x^k + y + \text{ (termos de ordem mais alta)}$$

é um ponto de inflexão com ordem de inflexão $k \geq 3$.

Contrariamente à nomenclatura clássica, para entender bem sistematicamente a singularidade dual, é melhor considerar um ponto de inflexão $B_{n,1}$ como um ponto singular. Conforme I. Vainsencher ([9]), um ponto de inflexão está no lugar geométrico descrito pela intersecção de $C : \; F(X,Y,Z) = 0$ com a curva projetiva *Hessiana* definida pelo polinômio homogêneo dado pelo determinante 3×3 seguinte:

$$H(F) = det \begin{bmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_{XZ} \\ F_{YX} & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_{ZX} & F_{ZY} & F_{ZZ} \end{bmatrix}.$$

Naturalmente, se $gr(F) = n$ então $gr(H(F)) = 3(n-2)$. Portanto pelo Teorema de Bezout, contando com multiplicidades, a quantidade de pontos de inflexão mais a quantidade de pontos singulares de C é dado por

$$\# \text{ (pontos de inflexão) } + \; \# \text{ (pontos singulares) } = 3n(n-2).$$

De fato, como $gr(F) = n$, o grau das derivadas F_{XX}, F_{XY}, F_{YY} será $n-2$. Assim, o determinante hessiano $H(F)$ definido acima tem grau igual a $3(n-2)$.

II - Singularidades provenientes de pontos de inflexão e pontos de multitangências.

Um ponto regular $P \in C$ fornece uma reta multitangente se a reta tangente T_P é também tangente a C em pelo menos algum outro ponto $Q \in C$, isto é, $T_Q = T_P$. O tipo mais comum é uma reta bitangente.

Se P é um ponto que fornece uma bi-tangente (então há um segundo ponto $Q \in C$ tal que $I(C, T_P, Q) = 2$) as demais intersecções $C \cap T_P$ são transversais, então sua imagem pela aplicação de Gauss é um nó ordinário (que denotaremos como singularidade do tipo A_1). Se a curva tem pontos q-tangentes (a pontos regulares não inflexionais) então a imagem pela aplicação de Gauss é topologicamente equivalente a uma *singularidade de Brieskorn* $B_{q,q}$. Esta singularidade tem q ramos regulares que se intersectam transversalmente. Classicamente esta singularidade é chamada de *singularidade ordinária*.

Se P é um ponto que fornece uma bitangente (então há um segundo ponto $Q \in C$ tal que $I(C, T_P, Q) = 2$) as demais intersecções $C \cap T_P$ são transversais, então sua imagem pela aplicação de Gauss é um nó ordinário (que denotaremos como singularidade do tipo A_1). Como $g(\mathcal{F}_n) = g(\check{\mathcal{F}}_n)$ mas $g(\mathcal{F}_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pois $g(\mathcal{F}_n)$ não possui singularidades, e $g(\check{\mathcal{F}}_n) = \frac{(\check{n}-1)(\check{n}-2)}{2} - \tau - 3n(n-2)$ onde τ é o número de nós de $\check{\mathcal{F}}_n$ e ao mesmo tempo o número de bitangentes de $\mathcal{F}_n$

$\#$ (bi-tangentes) =

$$= \frac{(\check{n}-1)(\check{n}-2)}{2} - 3n(n-2) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{2.6}$$

onde $\check{n} = n(n-1)$.

Para situações mais gerais onde C pode ter singularidades ou retas multi-tangentes, esta fórmula é mais complexa e deve ser reescrita utilizando a parcela de contribuição para o gênero $\delta(P)$, a saber,

$$\frac{(\check{n}-1)(\check{n}-2)}{2} - \sum_{Q \in \sum(\check{C})} \delta(\check{C}, Q) =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in \sum(C)} \delta(C, P). \tag{2.7}$$

A simplicidade dessa fórmula vem do fato que a aplicação de Gauss é uma aplicação bi-racional e portanto o gênero de $\check{C}$ é igual ao gênero de C.

2.4 Parametrizações de C e de $\check{C}$

É interessante notar que parametrizações locais (e mesmo, no caso de curvas racionais, parametrizações globais) da curva dual $\check{C}$ numa vizinhança de $G_f(P) \in \check{C}$, podem ser obtidas a partir de parametrizações de C numa vizinhança de P. Suponhamos que C tenha um único ramo em P, isto é, f é analiticamente irredutível em P, e que C tenha uma parametrização local, digamos, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, onde t é um parâmetro local em P e x e y são as coordenadas afins $x = \frac{X}{Z}$ e $y = \frac{Y}{Z}$.

Então em $G_f(P)$, o ramo local, que é a imagem do germe irredutível local P, tem parametrização

$$\begin{aligned} U(t) &= y'(t), \quad V(t) = -x'(t) \\ W(t) &= x'(t)y(t) - x(t)y'(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Esta parametrização segue do seguinte argumento. Considere o ponto $P_0 = (x_0, y_0) = P(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ fixado. A equação da reta que passa por P_0 e por $P = (x, y)$ é

$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0).$$

Queremos obter uma expressão da equação da reta na forma

$$L : U(t_0)x + V(t_0)y + W(t_0)z = 0,$$

ou, para $z = 1$,

$$L : U(t_0)x + V(t_0)y + W(t_0) = 0.$$

Ora, da equação $y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$ vem que

$$x'(t_0)[y - y(t_0)] = y'(t_0)[x - x(t_0)],$$

e portanto,

$$y'(t_0)x - x'(t_0)y - y'(t_0)x(t_0) + x'(t_0)y(t_0) = 0.$$

Assim, basta tomar,

$$U(t_0) = y'(t_0),\ V(t_0) = -x'(t_0) \text{ e } W(t_0) = x'(t_0)y(t_0) - y'(t_0)x(t_0)$$

e fazer t_0 variar.

Se $\check{C}$ é analiticamente irredutível em $G_f(P)$ então a última equação acima descreve o germe local em $G_f(P)$. Equivalentemente, nas coordenadas afins $(u, v) = (\frac{U}{W}, \frac{V}{W})$ a parametrização de $\check{C}$ em $G_f(P)$ é dada por

$$\begin{cases} u(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)} \\ \\ v(t) = \frac{-x'(t)}{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Se C é uma curva racional com parametrização global $(x(t), y(t))$, então 2.9 é também uma parametrização global.

Observação: Lembremos que a equação cartesiana (polinomial) da curva dual pode ser computada de maneira fácil por um cálculo envolvendo determinante.

Vamos agora relacionar as parametrizações (locais) da curva C e de $\check{C}$ com pontos de inflexão e pontos cuspidais. Suponhamos que a curva $C = \{f(x, y) = 0\}$ tenha uma parametrização global dada por $(x(t), y(t))$, onde $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uma parametrização global é uma aplicação bi-racional $\mathbb{P}^1 \longrightarrow$ C.

Diremos que $P = (a, b) \in C$ é um *ponto injetivo* em relação a esta parametrização se a imagem inversa de P em $\mathbb{P}^1$ é um único ponto.

Se $P = (\alpha, \beta)$ é um ponto de inflexão com ordem de inflexão k então

$$(f_x(\alpha, \beta), f_y(\alpha, \beta)) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad I(C \cdot T_P; P) = k$$

onde T_P é a reta tangente a C em P.

Para a parametrização $P(t) = (x(t), y(t))$, isto é equivalente a:

$$P(t_0) \text{ é ponto de inflexão de } C \text{ com ordem de inflexão } k$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0), \\ \Phi^{(j)}(t_0) = 0, \quad j \leq k - 1, \quad \Phi^{(k)}(t_0) \neq 0, \\ P \text{ é ponto injetivo da parametrização,} \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $\Phi(t) = y'(t_0)x(t) - x'(t_0)y(t)$.

Similarmente suponhamos que $P(t_0)$ seja uma singularidade cuspidal do tipo $B_{k,k-1}$ de C. Para a parametrização (local) $P(t) = (x(t), y(t))$, isto é equivalente a:

$$P(t_0) \text{ é singularidade de } C \text{ do tipo } B_{k,k-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (x^{(j)}(t_0), y^{(j)}(t_0)) = (0, 0) j \leq k - 2, \\ (x^{(k-1)}(t_0), y^{(k-1)}(t_0)) \neq (0, 0), \quad \Phi^{(k)}(t_0) \neq 0, \\ P \text{ é um ponto injetivo da parametrização,} \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $\Phi(t) = y^{(k-1)}(t_0)x(t) - x^{(k-1)}(t_0)y(t)$.

Vamos agora determinar o grau de uma curva racional C a partir de uma parametrização. Para isto, suponha que $x(t) = \frac{p_1(t)}{q_1(t)}$, $y(t) = \frac{p_2(t)}{q_2(t)}$, onde $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, seja uma parametrização primitiva para C. Segue do Teorema de Bézout que o grau de uma curva algébrica projetiva plana é a quantidade de pontos de intersecção da curva com uma reta genérica. Então o grau de C é dado pelo grau do numerador de uma função racional (considerando que o numerador e o denominador não tem fator não constante comum) $ax(t) + by(t) + c$ para uma escolha genérica de de $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.1. *Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$ onde $n > m > 1$, $r \geq 1$ e considere a curva racional $D_{m,n,r}$ definida pela parametrização*

$$u(t) = \frac{n^n t^{n+r-2}}{(m + mt - nt)^n}, \quad v(t) = \frac{m^m(-1-t)^{m+r-2}}{(m + mt - nt)^m}.$$

Na expressão $ax(t) + by(t) + c = 0$ na variável t, multiplicamos por $(m + mt - nt)^n$ e obtemos

$$an^n t^{n+r-2} + bm^m(-1-t)^{m+r-2}(m+mt-nt)^{n-m} + c(m+mt-nt)^n = 0.$$

Os monômios $an^n t^{n+r-2}$ e $bm^m(-1-t)^{m+r-2}(m+mt-nt)^{n-m}$ têm ambos grau igual a $n + r - 2$. O monômio $c(m + mt - nt)^n$ tem grau n. Logo vemos facilmente que o grau de $ax(t) + by(t) + c = 0$ é igual a $max(n + r - 2, n)$.

2.5 A geometria das curvas de Fermat

Vamos utilizar as curvas de Fermat para a construção de curvas nodais maximais. Assim, nesta seção, estudaremos a curva de Fermat de grau n de forma sistemática:

$$\mathcal{F}_n : \ F(X : Y : Z) = X^n + Y^n + Z^n = 0.$$

Denote o grau da curva dual $\check{\mathcal{F}}_n$ por $\check{n}$. Note que: $\check{n} = n(n-1)$ já que $\mathcal{F}_n$ é não singular. Como observamos na seção 2.2 o grupo $\mathbb{Z}_{n,n}$ induz uma ação nos conjuntos $\mathcal{F}_n$ e $\check{\mathcal{F}}_n$.

Observe primeiramente que $\mathcal{F}_n$ é uma curva não singular e portanto tem gênero $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Primeiramente vamos estudar os pontos de inflexão. Provaremos que $\mathcal{F}_n$ tem $3n$ pontos de inflexão com ordem de inflexão n. Estes pontos são

$$P_{1,j} = (0 : \xi_j : 1);\ P_{2,j} = (\xi_j : 0 : 1);\ P_{3,j} = (1 : \xi_j : 0),$$

para $j = 0, 1, ..., n-1$, onde $\xi_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{n}}$. Vamos provar que a reta tangente a $\mathcal{F}_n$ em $P_{1,j}$ é (z=1)

$$T_{1,j} : Y - \xi_j = 0.$$

Esta reta vai determinar na curva dual $\check{\mathcal{F}}_n$ uma singularidade do tipo $B_{n,n-1}$ em $(u : v : w) = (0 : 1 : -\xi_j)$. A situação é completamente análoga para os outros pontos de inflexão. Podemos ver isto através de uma mudança (permutação) de coordenadas. Vamos provar agora os fatos enunciados acima.

I - Pontos de Inflexão:

Denote, como de costume, $F = F(X, Y, Z) = X^n + Y^n + Z^n$ a equação de $\check{\mathcal{F}}_n$ e

$$H = H(X, Y, Z) = det \begin{bmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_{XZ} \\ F_{YX} & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_{ZX} & F_{ZY} & F_{ZZ} \end{bmatrix} = 0.$$

Como já observamos anteriormente, os pontos P tais que $F(P) = 0$ e $H(P) = 0$ são os pontos singulares de $\mathcal{F}_n$ e os pontos de inflexão de $\check{\mathcal{F}}_n$. Mas $\check{\mathcal{F}}_n$ não tem pontos singulares, portanto estes pontos são exatamente os pontos de inflexão. Computando as derivadas indicadas obtemos:

$$H = det \begin{bmatrix} n(n-1)X^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & n(n-1)Y^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & n(n-1)Z^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Portanto $H = n^3(n-1)^3(XYZ)^{n-2} = 0$ nos fornece

$$X = 0 \qquad \text{ou} \quad Y = 0 \quad \text{ou} \quad Z = 0.$$

No caso em que $X = 0$, como $F(P) = 0$ temos $Y^n + Z^n = 0$. Colocando

$$\xi_\lambda = e^{\frac{(1+2\lambda)\pi i}{n}}, \quad \lambda = 0, 1, \cdots, n-1,$$

obtemos

$$Y = Z\xi_\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Logo, para $X = 0$ temos os seguintes pontos de inflexão:

$$P_{1,\lambda} = (0 : \xi_\lambda : 1), \quad \lambda = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Os outros casos são análogos. Temos portanto os $3n$ pontos de inflexão anunciados acima.

Precisamos agora determinar a ordem de inflexão de cada um deles. Vamos estudar os pontos $P_{1,\lambda}$. Os demais são análogos. Por simplicidade de notação vamos momentaneamente chamar $P_{1,\lambda}$ de P. Primeiramente observamos que a reta tangente a $\mathcal{F}_n$ em P é de fato $T_P : Y - \xi_\lambda Z$ uma vez que, lembrando que $\xi_\lambda^n = -1$, temos

$$F_X(P) = 0, \quad F_Y(P) = n\xi_\lambda^{n-1} = n\frac{\xi_\lambda^n}{\xi_\lambda} = -\frac{n}{\xi_\lambda}, \quad F_Z(P) = n$$

e, portanto, $XF_X(P) + YF_Y(P) + ZF_Z(P) = -\frac{n}{\xi_\lambda}Y + nZ$. Como podemos dividir por n e multiplicar por ξ_λ obtemos $T_P : Y - \xi_\lambda Z = 0$.

Para mostrar que a ordem de inflexão de P é n, basta mostrar que a multiplicidade de intersecção de $\mathcal{F}_n$ com T_P é exatamente n. Mas, observando que $Y^n + Z^n$ é múltiplo de $Y - \xi_\lambda Z$, utilizando as propriedades (6) e (7) da definição axiomática da multiplicidade de intersecção, obtemos

$$\begin{aligned} I(F, T_P, P) &= I((X^n + Y^n + Z^n), Y - \xi_\lambda Z, P) \\ &= I(X^n, Y - \xi_\lambda Z, P) \\ &= nI(X, Y - \xi_\lambda Z, P) = n. \end{aligned}$$

Resumimos estes fatos sobre os pontos de inflexão na seguinte proposição.

Proposição 2.2. *A curva de Fermat $\mathcal{F}_n$ possui $3n$ pontos de inflexão todos com ordem de inflexão n, a saber,*

$$P_{1,j} = (0 : \xi_j : 1), \quad P_{2,j} = (\xi_j : 0 : 1), \quad P_{3,j} = (1 : \xi_j : 0)$$

para $j = 0, 1, ..., n-1$, onde $\xi_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{n}}$. Observe que todos eles estão situados nos eixos coordenados.

II - Bitangentes:

Agora vamos estudar as retas bitangentes (ou multitangentes) de $\mathcal{F}_n$. Façamos uma heuristica. Como a curva dual $\check{\mathcal{F}}_n$ é biracionalmente equivalente a $\mathcal{F}_n$ ela tem gênero

$$g(\mathcal{F}_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = g(\check{\mathcal{F}}_n).$$

Vamos usar a fórmula de M. Noether para o gênero de $\check{\mathcal{F}}_n$. Denotaremos τ o número de nós de $\check{\mathcal{F}}_n$, τ também será o número de bitangentes de $\mathcal{F}_n$, e admitimos apenas bitangentes. Na fórmula de M. Noether, se P é um nó tem contribuição $\delta(P) = 1$. Também o grau de $\check{\mathcal{F}}_n = \check{n} = n(n-1)$. $\check{\mathcal{F}}_n$ tem $3n$ pontos singulares do tipo $B_{n,n-1}$ e para cada um deles já calculamos a contribuição. Para $B_{n,m} = x^n + y^m$ $mdc(n,m) = d$, $P = (0,0)$ $\delta(P) = \frac{1}{2}[(m-1)(n-1)+d-1]$ então para $B_{n,n-1}$ $\delta(P) = \frac{1}{2}[(n-1-1)(n-1)+1-1] = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Teremos a identidade

$g(\mathcal{F}_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = g(\check{\mathcal{F}}_n) =$
$\frac{(\check{n}-1)(\check{n}-2)}{2} - \tau - 3n\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

obtemos que o número τ destas bitangentes deve ser

$$\tau = \tfrac{(\check{n}-1)(\check{n}-2)}{2} - 3n\tfrac{(n-1)(n-2)}{2} - \tfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \tfrac{n^2(n-2)(n-3)}{2}.$$

Ora, vamos mostrar diretamente que esta fórmula é verdadeira e, portanto só temos de fato bitangentes a $\mathcal{F}_n$.

Proposição 2.3. *A curva de Fermat $\mathcal{F}_n$ tem exatamente $\frac{1}{2}n^2(n-2)(n-3)$ retas bitangentes e não tem outras multitangentes.*

Demonstração: Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n-1}}$. Em geral, a determinação de retas bi-tangentes não é tão simples como os pontos de inflexão. Suponhamos que $P = (a,b)$ e $Q = (a',b')$ sejam pontos de bi-tangência em $\mathcal{F}_n$. A reta tangente em $P = (a,b)$ é

$$f_X(a,b)(X-a) + f_Y(a,b)(Y-b) = 0,$$

que é a mesma reta tangente em $Q = (a',b')$, ou seja,

$$f_X(a',b')(X-a') + f_Y(a',b')(Y-b') = 0.$$

Então, olhando para os dois vetores diretores destas retas, temos que

$$(f_X(a,b), f_Y(a,b)) = \lambda(f_X(a',b'), f_Y(a',b')),\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Como $f(X,Y) = X^n + Y^n + 1$, temos $f_X = nX^{n-1}$ e $f_Y = ny^{n-1}$. Assim a equação 2.12 torna-se

$$(na^{n-1}, nb^{n-1}) = \lambda(n(a')^{n-1}, n(b')^{n-1}),$$

isto é,

$$(a^{n-1}, b^{n-1}) = \lambda((a')^{n-1}, (b')^{n-1}),$$

que são os vetores diretores da reta bitangente. Assim temos que a equação da reta tangente à $\mathcal{F}_n$ em P é

$$a^{n-1}X + b^{n-1}Y + c = 0.$$

Como $P = (a,b)$ está nesta reta temos $0 = a^n + b^n + c = -1 + c$ e, então $c = 1$. Logo a reta bitangente tem equação

$$a^{n-1}X + b^{n-1}Y + 1 = 0.$$

Assim $G_f(P) = (a^{n-1} : b^{n-1} : 1)$ e concluimos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^n + b^n + 1 & = & 0 \\ (a')^n + (b')^n + 1 & = & 0 \\ a^{n-1} & = & (a')^{n-1} \\ b^{n-1} & = & (b')^{n-1}. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Assim $a' = a\omega^k$ e $b' = b\omega^j$ para inteiros $0 < j,\ k < n-1$ (Observe que temos necessariamente $P \neq Q$). Vamos escrever algumas relações envolvendo w^k e w^j.

De $(a')^n = a'(a')^{n-1} = a\omega^k a^{n-1}$ obtemos $(a')^n = a^n\omega^k$. De forma análoga obtemos $(b')^n = b^n\omega^j$. Somando-se estas duas últimas igualdades e eliminando b e b' usando as duas primeiras equações de 2.13 obtemos

$$(a')^n + (-(a')^n - 1) = a^n\omega^k + (-a^n - 1)\omega^j.$$

Daí segue que

$$a^n(\omega^k - \omega^j) = \omega^j - 1.$$

Como $P \neq Q$ temos que $j \neq k$, $k \neq 0$ e $j \neq 0$. Assim, colocando

$$\beta_{j,k} = \frac{\omega^j - 1}{\omega^k - \omega^j}$$

obtemos

$$a^n = \beta_{j,k} \quad \text{e} \quad b^n = -1 - \beta_{j,k}.$$

Para qualquer $0 < j < n-1$, observe que $\omega^{-j} = \omega^{n-1-j}$. Defina

$$\alpha_{j,k} := \frac{\omega^k - 1}{1 - \omega^j}.$$

Temos

$$\alpha_{n-1-(j-k),\, n-1-j} = \tfrac{\omega^{n-1-j}-1}{1-\omega^{n-1+k-j}} = \tfrac{(\omega^{-j}-1)}{(1-\omega^{k-j})}\tfrac{\omega^j}{\omega^j} = \tfrac{1-\omega^j}{\omega^j-\omega^k} = \beta_{j,k}.$$

Lema 2.3. *Os números complexos $\beta_{j,k}$ (ou equivalentemente os $\alpha_{j,k}$) são todos distintos para $1 \leq j, k \leq n-1$ e $j \neq k$.*

Supondo o lema verdadeiro podemos escolher n^2 soluções distintas em (a, b) das equações $a^n = \beta_{j,k}$ e $b^n = -1 - \beta_{j,k}$ quando j, k são fixados. Assim, na totalidade, atingimos $n^2(n-2)(n-3)$ possíveis soluções. Como uma reta bi-tangente vai passar por dois desses pontos então a quantidade de retas bi-tangentes é

$$\#\{\text{bi-tangentes}\} = \frac{n^2(n-2)(n-3)}{2},$$

como esperado.

Demonstração do Lema: Vamos calcular $\theta = arg(1-\omega^j)$ por geometria euclidiana elementar. Fazendo a figura no plano complexo vemos que

$$\theta = arg(1-\omega^j) = arg(\omega^j - 1) + \pi.$$

Vamos usar os fatos simples que $|\omega^i| = 1$ e $|-1| = 1$ para obter o ângulo $\gamma = arg(\omega^j - 1)$. Observe que $\omega^j - 1$ (visto como vetores no $\mathbb{R}^2$) bissecta o ângulo γ_1 formado pelos vetores ω^j e -1. Então temos $\alpha = arg(\omega^j) = \frac{2j\pi}{n-1}$. Daí $\gamma = arg(\omega^j - 1)$ e $2\gamma_1 + \alpha = \pi$, logo,

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{n-1}.$$

Assim,

$$\theta = \alpha + \gamma_1 + \pi = \tfrac{2j\pi}{n-1} - \tfrac{j\pi}{n-1} + \tfrac{\pi}{2} + \pi = \tfrac{j\pi}{n-1} + \tfrac{3\pi}{2} = \pi\left(\tfrac{j}{n-1} + \tfrac{3}{2}\right).$$

e portanto, $\theta = arg(1-\omega^j) = \pi\left(\frac{j}{n-1} - \frac{1}{2}\right)$. Segue daí que,

$$arg(\omega^k - 1) = \pi\left(\frac{k}{n-1} - \frac{1}{2} + 1\right) = \pi\left(\frac{k}{n-1} + \frac{1}{2}\right).$$

Logo,

$$arg(\alpha_{j,k}) = arg\left(\frac{\omega^k - 1}{1-\omega^j}\right) = \pi\left(\frac{k}{n-1} + \frac{1}{2}\right) - \pi\left(\frac{j}{n-1} - \frac{1}{2}\right).$$

Isto é,

$$arg(\alpha_{j,k}) = \pi\left(\frac{k-j}{n-1} + 1\right) \quad \text{e} \quad arg(-\alpha_{j,k}) = \pi\left(\frac{k-j}{n-1}\right).$$

Portanto se $\alpha_{j,k} = \alpha_{l,m}$ tem o mesmo argumento temos que

$$\pi\left(\frac{k-j}{n-1}\right) = \pi\left(\frac{m-l}{n-1}\right) + 2t\pi \;\text{ para algum }\; t \in \mathbb{Z},$$

isto é, $\pi(k-j) = \pi(m-l) + 2t\pi(n-1)$ e daí, $j-k \equiv l-m \mod 2(n-1)$. Como $1 \leq j,\ k \leq n-1$ e $1 \leq m,\ l \leq n-1$ resulta $j-k = l-m$. Colocando $s = k-j = l-m$, se $\alpha_{j,k} = \alpha_{l,m}$. $\frac{\omega^k-1}{1-\omega^j} = \frac{\omega^m-1}{1-\omega^l}$. Reescrevendo com $k = j-s$ e $m = l-s$, $\frac{\omega^{j-s}-1}{1-\omega^j} = \frac{\omega^{l-s}-1}{1-\omega^l}$, então

$(\omega^{j-s}-1)(1-\omega^l) = (\omega^{l-s}-1)(1-\omega^j)$,

$\omega^{j-s} + \omega^l = \omega^{l-s} + \omega^j$

tem-se

$$(1-\omega^s)(\omega^l - \omega^j) = 0.$$

Mas, isto ocorre se, e somente se, $j = l$. Analogamente $k = m$. ■

2.6 A geometria da curva dual $\check{\mathcal{F}}_n$

Considere $\check{\mathcal{F}}_n : \check{F}(U,V,W) = 0$ a curva dual de $\mathcal{F}_n$ ou a sua equação afim $\check{f}(u,v) = 0$, com $u = \frac{U}{W}$ e $v = \frac{V}{W}$. Como $\mathcal{F}_n$ é um polinômio que é simétrico pela ação de $\mathbb{Z}_{n,n}$, segue que $\check{F}(U,V,W)$ é um polinômio simétrico de grau $n(n-1)$ pela ação de $\mathbb{Z}_{n,n}$ (lembremos que $\mathbb{Z}_{n,n} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$).

Em particular podemos escrever $\check{f}(u,v) = h(u^n, v^n)$ para algum polinômio simétrico $h(u,v)$ de grau $n-1$.

Pelo que já sabemos da geometria da curva de Fermat $\mathcal{F}_n$, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2.4. *A dual $\check{\mathcal{F}}_n$ da curva de Fermat possui $3n$ singularidades do tipo $B_{n,n-1}$ e $\frac{1}{2}n^2(n-2)(n-3)$ nós (provenientes das retas bi-tangentes de $\mathcal{F}_n$).*

Em cada eixo coordenado $U = 0$, $V = 0$ e $W = 0$ há exatamente n singularidades do tipo $B_{n,n-1}$. A reta tangente em $P_{1,j}$ é definida por $Y = \xi_j Z$ e sua imagem pela aplicação de Gauss é uma singularidade do tipo $B_{n,n-1}$ em $(U : V : W) = (0 : 1 : -\xi_j)$. Para conseguirmos mais informações sobre a singularidade $B_{n,n-1}$ vamos considerar a parametrização de $(\mathcal{F}_n, P_{1,j})$ dada por

$$\begin{cases} X(t) &= t \\ Y(t) &= \xi_j(1+t^n)^{\frac{1}{n}} \\ Z(t) &= 1, \end{cases}$$

onde $(1+t^n)^{\frac{1}{n}}$ é a escolha do ramo que leva $t = 0$ em 1. Pela fórmula binomial temos que

$$(1+t^n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \left(\frac{1}{n}\right) t^n + \text{ (termos de graus mais altos).}$$

Assim, por (2.8), $\check{F}_n$ tem uma parametrização em $(U, V, W) = (0, 1, -\xi_j)$ dada por

$$\begin{cases} U(t) &= \xi_j(t^{n-1} + \text{ (termos de graus mais altos))} \\ V(t) &= -1 \\ W(t) &= \xi_j(1 - \frac{n-1}{n}t^n + \text{ (termos de graus mais altos)).} \end{cases}$$

Agora, usando as coordenadas (u, v_j), $u = \frac{U}{W}$, $v = \frac{V}{W}$ e $v_j = v + \xi_j^{-1}$, as três igualdades acima fornecem a equação local de $\check{\mathcal{F}}_n$ dada por

$$\check{f}(u, v_j - \xi_j{}^{-1}) = c_j v_j{}^{n-1} + u^n + \text{ (termos de graus mais altos altos),}$$

onde $c_j \neq 0$. Assim ela tem uma singularidade do tipo $B_{n,n-1}$ cujo cone tangente em $\check{P}_{1,j}$ é definido por $V + \xi_j{}^{-1}W = 0$.

2.7 Construção de curvas nodais maximais

Uma curva D de grau d é chamada nodal maximal se ela é uma curva racional irredutível cujas singularidades são somente nós. Ela é maximal no sentido que uma curva de grau d tendo mais singularidades deverá necessariamente ser redutível. Então, como

$$g = g(D) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in Sing(D)} \delta(P)$$

e a contribuição $\delta(P)$ de cada nó é exatamente 1, D precisa ter $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ nós.

Vamos dar uma construção explícita de uma tal curva nodal maximal utilizando a curva de Fermat.

Seja $\check{F}(U, V, W)$ o polinômio homogêneo nas indeterminadas U, V e W que define $\check{\mathcal{F}}_n$. O Teorema 2.1 garante que existe um polinômio homogêneo $H = H(U, V, W)$ de grau $n-1$ tal que

$$\check{F}(U, V, W) = H(U^n, V^n, W^n).$$

Considere a curva de grau $n-1$ definida por $H(U, V, W) = 0$. Vamos denotá-la por D_{n-1}.

Proposição 2.5. *D_{n-1} é uma curva plana nodal maximal de grau $n-1$.*

Demonstração: A racionalidade de D_{n-1} segue do Teorema 2.2 e da racionalidade da reta $l : x+y+1 = 0$. Portanto, para concluir que ela é nodal máximal basta mostrar que ela possui uma quantidade certa de singularidades do tipo nó duplo. Observe que a curva $\check{\mathcal{F}}_n$ possui $\frac{1}{2}n^2(n-2)(n-3)$ nós fora da união dos três eixos coordenados. Além disso, os tres eixos coordenados são invariantes pela ação induzida por $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ descrita na secção 2.2 O recobrimento

$$\begin{array}{cccc} \check{\pi}_{n,n} : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (U : V : W) & \mapsto & (U^n : V^n : W^n) \end{array}$$

considerado na secção 2.2 é n^2 ramificado. Os $\frac{n^2(n-2)(n-3)}{2}$ nós duplos de $\check{\mathcal{F}}_n$ se transformam em $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ nós duplos em D_{n-1}. Admitindo que o grau de D_{n-1} é $n-1$, esta é a quantidade certa de nós duplos para que D_{n-1} seja uma curva nodal maximal. $\blacksquare$

Falta agora computar o grau de D_{n-1}. Na verdade vamos compreender melhor a geometria de D_{n-1}. Primeiramente, ela deve ser racional. Então, é possível encontrar uma parametrização global para ela? Vamos ver que sim.

Seguindo a notação do Teorema 2.2, se $l : g(x,y) = x + y + 1 = 0$ então $g_x = 1$ e $g_y = 1$. Usando a fórmula 2.5 com $m = s = n$ temos,

$$\begin{aligned}
\phi_{n,n}(x,y) &= \left(\tfrac{n^n x^{n-1} 1^n}{(-nx1-ny1)^n}, \tfrac{n^n y^{n-1} 1^n}{(-nx1-ny1)^n}\right) \\
&= \left(\tfrac{n^n}{n^n}(-1)^n \tfrac{x^{n-1}}{(x+y)^n}, \tfrac{n^n}{n^n}(-1)^n \tfrac{y^{n-1}}{(x+y)^n}\right) \\
&= \left(\tfrac{(-1)^n x^{n-1}}{(x+y)^n}, \tfrac{(-1)^n y^{n-1}}{(x+y)^n}\right).
\end{aligned}$$

Em coordenadas homogêneas podemos escrever:

$$\phi_{n,n}(X,Y,Z) = (X^{n-1}Z : Y^{n-1}Z : (-1)^n(X+Y)^n).$$

Uma parametrização canônica para a reta $g(x,y) = x + y + 1 = 0$ pode ser

$$g : \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= -1 - t. \end{cases}$$

Substituindo na expressão de $\phi_{n,n}(x,y)$ acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\phi_{n,n}(x,y) &= \left(\tfrac{(-1)^n t^{n-1}}{(t-1-t)^n}, \tfrac{(-1)^n(-1-t)^{n-1}}{(t-1-t)^n}\right) \\
&= \left(\tfrac{(-1)^n}{(-1)^n} t^{n-1}, \tfrac{(-1)^n}{(-1)^n}(-1-t)^{n-1}\right) \\
&= (t^{n-1}, (-1-t)^{n-1}) := (u(t), v(t)).
\end{aligned}$$

Portanto, uma parametrização explícita para D_{n-1} pode ser dada por

$$D_{n-1} : \begin{cases} u(t) &= t^{n-1} \\ v(t) &= (-1-t)^{n-1}. \end{cases}$$

Lema 2.4. *O grau de D_{n-1} é igual a $n-1$*

Demonstração: É fácil calcular, a partir da parametrização, o grau de D_{n-1}, a saber, basta calcular o grau de uma expressão $a(t^{n-1}) + b(-1-t)^{n-1} + c$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ genéricos. Naturalmente obtemos que o grau de D_{n-1} é $n-1$. ■

Pontos de inflexão de D_{n-1}

Para estudar os pontos de inflexão de D_{n-1} utilizamos o critério 2.10. Primeiramente observe que $P = P(0) = (0, (-1)^{n-1})$ é de fato um ponto injetivo, pois como $u(t) = t^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $u(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$. Ora, é fácil ver por indução que

$$\phi^{(j)}(0) = 0,\ j \leq n-2 \quad \text{e} \quad \phi^{(n-1)}(0) = (n-1)!(-1)^{n-1} \neq 0.$$

Logo, pelo critério, $P = (0, (-1)^{n-1})$ (ou, em coordenadas homogêneas, $(0 : (-1)^{n-1} : 1)$) é um ponto de inflexão de D_{n-1} com ordem de inflexão $n-1$. De maneira análoga podemos ver que $((-1)^n : 0 : 1)$ e $(1 : (-1)^n : 0)$ são pontos de inflexão de D_{n-1} com ordem de inflexão $n-1$. Observe que o ponto de inflexão $(1 : (-1)^n : 0)$ pode ser visto como a imagem de $\lim_{t \mapsto \infty}(x(t), y(t), 1)$.

D_{n-1} não tem outros pontos de inflexão. Isto poderia ser visto utilizando novamente o critério 2.10, mas vamos fazer um outro argumento.

Considere a equação $H = H(U, V, W) = Hess(H) = 0$. A contribuição de cada nó para a multiplicidade de intersecção de D_{n-1} com H é 6 e a contribuição dos pontos de inflexão do tipo $B_{n-1,1}$ é $n-3$ (Veja [7]). Levando apenas essas informações para a fórmula (página 36) que nos fornece a quantidade de pontos de inflexao mais a quantidade de nós (contadas as multiplicidades) obtemos:

$$3 \cdot (n-3) + 6 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 3(n-1)(n-3),$$

que já nos fornece uma igualdade. Assim, se D_{n-1} tivesse outros pontos de inflexão, eles iriam contribuir positivamente no lado esquerdo da fórmula acima acarretando uma desigualdade, e isto seria uma contradição com a fórmula.

Assim provamos o teorema seguinte:

Teorema 2.3. *: A curva plana D_{n-1} parametrizada por*

$$\begin{cases} u(t) &= t^{n-1} \\ v(t) &= (-1-t)^{n-1}, \end{cases}$$

é uma curva nodal máximal de grau $n-1$. Além disso, D_{n-1} possui exatamente três pontos de inflexão, com ordem de inflexão $n-1$, a saber,

$$(0 : (-1)^{n-1} : 1),\ ((-1)^n : 0 : 1) \text{ e } (1 : (-1)^n : 0),$$

e exatamente $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *pontos singulares, todos do tipo nó.*

Exemplo 2.2. *Considere* $n = 3$.

$$D_2: \ u(t) = t^2, \ v(t) = (-1-t)^2 \ \text{ tem } \ \tau = \frac{(3-2)(3-3)}{2} = 0 \ \text{ nós.}$$

Neste caso vemos então que a curva racional é não singular (não possui nós).

Exemplo 2.3. *Considere* $n = 4$.

$$D_3: \ u(t) = t^3, \ v(t) = (-1-t)^3 \ \text{ tem } \ \tau = \frac{(4-2)(4-3)}{2} = 1 \ \text{ nó.}$$

Neste caso D_3 é uma cúbica com um nó. Naturalmente esta cúbica é projetivamente equivalente à curva α. Vamos verificar isto explicitamente. Faça: $v+u+1 = -(1+t)^3 + t^3 + 1 = -3t(t+1)$. Então temos, $(1+u+v)^3 = -27t^3(1+t)^3 = 27uv$, e portanto a curva transformada é dada pela equação:

$$f(u,v) = (-v-u-1)^3 - 27uv = 0.$$

Vamos determinar suas singularidades:

$$f_u = 3(1+u+v)^2 - 27v = 0 \qquad f_v = 3(1+u+v)^2 - 27u = 0$$

Obtemos então $u = v$. Daí vem que $4u^2 - 5u - 1 = 0$, cujas raízes são $u = 1$ e $\frac{1}{4}$. Vemos facilmente que que o ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ não está na curva. Assim, necessariamente, $u = v = 1$, uma vez que $(1,1)$ está na curva. Voltando à parametrização, a primeira equação nos fornece $u = 1 = t^3$. Isto é,

$$t_1 = 1, \ \ t_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \ \text{ e } \ t_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

A segunda equação nos fornece $v = 1 = -(1+t)^3$. Então t deve satisfazer a equação $t^3 + 3t^2 + 3t + 2 = 0$. Mas apenas t_2 e t_3 são raízes dessa equação. Assim, t_2 e t_3 (na parametrização) nos fornecem o nó $(u,v) = (1,1)$. Fazendo sucessivamente as mudanças:

$$u' = u-1, \ v' = v-1; \ \ u" = u'+v', \ v" = u'-v', \ \ U = u", \ V = -iv",$$

obtemos a equação $4U^3 + 9U^2 - 27V^2 = 0$ que é uma equação da curva α.

2.8 Questões em aberto

Concluímos a nossa dissertação expondo duas questões em aberto. Para isto consideremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, a operação seguinte. Para uma curva $C = \{h(u,v) = 0\}$ dada em $\mathbb{P}^2$, tomamos a sua dual $\check{C}$, voltamos para $\pi_{m,m}^{-1}(C)$ e então tomamos novamente a curva dual e baixamos por $\check{\pi}_{m,m}$. Vamos denotar a curva obtida por $T_m(C)$. Note que T_1 é simplesmente a identidade.

Teorema 2.4. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Então vale a iqualdade $T_m(D_{n-1}) = D_{n+m-2}$. Assim $\{D_j, j = 2, ..., \infty\}$ é uma sequência de curvas nodais maximais que é estável por T_m.*

Demonstração: Primeiramente $\check{D}_{n-1}$ tem a parametrização

$$\check{D}_{n-1}: \ x(t) = t^{2-n}, \ \ y(t) = (-1-t)^{2-n}$$

e o seu retorno por $\pi_{m,m}$ é parametrizado por

$$x(t) = t^{\frac{2-n}{m}}, \ \ y(t) = (-1-t)^{\frac{2-n}{m}}.$$

Esta parametrização é multivaluada pois o retorno não é racional. A parametrização da curva dual é dada por

$$u(t) = t \cdot t^{\frac{n-2}{m}}, \ \ v(t) = (-1-t) \cdot (-1-t)^{\frac{n-2}{m}}$$

e assim, baixando pela $\pi_{m,m}$, sua parametrização é

$$u(t) = t^{n+m-2}, \ \ v(t) = (-1-t)^{n+m-2},$$

que é a parametrização de D_{n+m-2}. ■

As questões em aberto:

Podemos utilizar as mesmas técnicas que usamos para as curvas de Fermat para estudar a geometria das curvas de Brieskorn que são dadas por equações afins da forma

$$\mathcal{F}_{n,m}: \ \ f(x,y) = x^n + y^m + 1 = 0,$$

onde $n > m \geq 2$, MDC$(n,m) = 1$.

A questão proposta por M. Oka em [6] é a seguinte conjectura:

Conjectura I das Bi-tangentes:

Se $MDC(n,m) = 1$ então a curva dual $\check{\mathcal{F}}_{n,m}$ tem somente singularidades do tipo nós e cúspides fora dos eixos coordenados $U \cdot V \cdot W = 0$
.

Esta conjectura foi verificada, utilizando o software *Maple*, para $n \leq 20$. M. Oka [6] provou resultados análogos aos obtidos para a curva de Fermat para as curvas de Brieskorn dependentes desta conjectura. Ele encontrou uma fórmula para o número de nós:

$$\# \text{ nós } (\check{\mathcal{F}}_{n,m}) = \frac{1}{2}nm(nm - n - m - 1),$$

e uma fórmula para o número de cúspides:

$$\# \text{ cúspides } = nm.$$

Oka toma a curva

$$D_{n,m} : u(t) = \tfrac{n^n t^{n-1}}{((m-n)t+m)^n}\ , \quad v(t) = \tfrac{m^m(-1-t)^{m-1}}{((m-n)t+m)^m},$$

e define a curva

$$D_{n,m,r} : u(t) = \tfrac{n^n t^{n+r-2}}{((m-n)t+m)^n}, \quad v(t) = \tfrac{m^m(-1-t)^{m+r-2}}{((m-n)t+m)^m}.$$

e propõe a conjectura:

Conjectura II das Bi-tangentes:

As possíveis singularidades em $D_{n,m,r} \cap \{U \cdot V \cdot W \neq 0\}$ são cúspides $(r \neq 2)$ e nós.

Ele calcula o número de nós de $D_{n,m,r}$:
Se $r \geq 2$ então

$$\# \text{ nós}(D_{n,m,r}) = \\ = \tfrac{1}{2}(n+r-3)(n+r-4) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-m-1) - 1 + \delta_{r,2}.$$

Se $r = 1$ então

$$\# \text{ nós}(D_{n,m,r}) = \tfrac{1}{2}(nm - n - m - 1),$$

onde $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$.

Referências Bibliográficas

[1] W. FULTON, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geomettry*, Advanced book classics series Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.

[2] A. HEFEZ, *Irreducible plane curves singularities, in Real and Complex Singularities*, **Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 232,** Marcel Dekker, p. 1-120, 2003.

[3] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, **annals of Mathematics Studies, 61** Princeton Univ. Press, 1968.

[4] M. NAMBA, *Geometry of projective algebraic Curves*, **Marcel Dekker**, New York, 1984.

[5] M. OKA, *Geometry of cuspidal sextics and their dual curves.* Singularities (Sapporo, 1998), Adv. Stud. Pure Math. , 29, Kinokuniya, Tokyo, p. 245-277, 2000.

[6] M. OKA, *On Fermat Curves and Maximal Nodal Curves*, Michigan Math. Journal, 53, p. 459-477, 2005.

[7] J. J. RISLER, *L'idéal Jacobien d'une Courbe Plane*, **Bull. Soc. Math. France, 99** Tata Inst. Fund. Res. (1966).

[8] R. THOM, *L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome*, **Topology, 3**, p. 297-307, 1965.

[9] I. VAINSENCHER, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitária, **IMPA, CNPq**, 1996.

[10] R. WALKER, *ALGEBRAIC CURVES*, Princeton University Press, 1950.

[11] O. ZARISKI, *Studies in equisingularity I*, **Amer. Journal of Math. 87**, 1965.

[12] O. ZARISKI, *Commutative Algebra*, Vol. 2, **Van Nostrand**, 1960.