

ANDRÉ OAKES DE OLIVEIRA GONÇALVES

**O fóton Massivo em Supercondutores**

VITÓRIA

2012



ANDRÉ OAKES DE OLIVEIRA GONÇALVES

## **O fóton Massivo em Supercondutores**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física)

VITÓRIA

2012



*"Primeiro vem os sorrisos, depois as mentiras e, por último, o tiroteio."*

*Pai de Cuthbert Algood*



# Agradecimentos

*No terreno familiar, devo agradecimentos à minha mãe que sempre acreditou em mim mais do que eu mesmo. Do seu protecionismo, sua preocupação constante e seu eterno bom humor. Juntamente, devo agradecimentos ao meu irmão Caio que sempre me ouviu cuidadosamente. Devo, também, agradecimentos à Raíssa, minha irmã, pelo simples fato de estar lá.*

*Nos meus todos anos dedicados à UFES, presto agradecimentos aos meus dois principais amigos, Paulo e Ramon por terem me salvado inúmeras vezes de apuros financeiros e emocionais. São alguns anos de diversão nas mais diversas situações, cumplicidade e fraterno interesse. Ao Paulo agradeço pelo bom humor e pela praticidade que acabei adquirindo para resolver situações. Ao Ramón pela coragem de me expressar com bom humor em todas as situações, inclusive nas mais sérias!*

*Devo, ainda, agradecimentos aos muitos outros amigos que sempre estiveram presentes e preocupados com o “rumo das coisas”. Estes são, sem qualquer ordem de preferência ou alfabética (!): Alexandre Afonso Le Shutz, Thiago W. Gottardi, Rodolfo Sant’anna, Fábio Xavier, Maurício Araújo, Mardoqueu de Oliveira, Ádila Motta, Vinícius Kbelo, Rosa Maria, Diego e Juliana (também ao Ícaro).*

*Aos queridos amigos do IFES e da UCL que tanto me ajudaram profissionalmente. Sem ordem: Thiago W. Gottardi (esse aparece duas vezes aqui!!!), Célio Marques, Érika Aparecida, Sandro Santos, Aline Costalonga, José Mário e João Batista pela discussão sobre boas músicas!!! Na UCL, também sem qualquer ordem de preferência, aos amigos Geovane Barbosa, Fernanda Toso, Rúbia Carla, Walquíria Torezani, Arnóbio Vassem entre todos os outros. Muito obrigado!*

*Quero agradecer imensamente ao professor José Alexandre Nogueira por ter me ensinado tanto sobre ética e profissionalismo. Aprendi que ser certinho é uma virtude muito mal entendida pelas pessoas.*

*Agradeço também ao professor Humberto Belich pela confiança e paciência no decorrer do trabalho e ao professor Marcos Tadeu pela disposição constante em ouvir e atender no que fosse possível. Agradeço também a Capes pelo apoio financeiro a este trabalho.*

*Por último, mas com extrema relevância, eu quero agradecer à minha ex-esposa Ivanna Frota por me apoiar e por desejar tão intensamente que este trabalho estivesse terminado em algum momento. Se vocês todos estão lendo essas páginas significa que neste momento ela está bem tranquila!!!*



*Esta dissertação é dedicada aos meus avós:*

*Nilza e Elydio. Obrigado por existirem!*

# Resumo

É um fato bem conhecido que a radiação eletromagnética é medida por uma partícula de massa de repouso nula, o fóton. No entanto, sabemos que existem mecanismos que geram espontaneamente massa para as partículas. É nosso objetivo neste trabalho investigar a possibilidade de dar massa ao fóton via o mecanismo de penetração do campo magnético na blindagem devida ao efeito Meisner em supercondutores. Propomos uma associação entre a "massa de repouso do fóton" e o comprimento de penetração do campo magnético em uma amostra supercondutora. Possíveis valores para esta massa são então determinados utilizando-se valores típicos de comprimentos de penetração.

# Abstract

It is well known that electromagnetic radiation is measured by a particle of zero rest mass, the photon. However, we know that there are mechanisms that generate spontaneous mass to particles. It is our goal in this work to investigate the possibility of giving mass to the photon on the mechanism of penetration of the magnetic field due to the shielding in superconducting on Meisner effect. We propose an association between the "rest mass of photon" and the length of penetration of the magnetic field in a superconducting sample. Possible values for this mass are then determined using typical values of lengths of penetration.



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Dedicatória</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Agradecimentos</b>  | <b>7</b>  |
| <b>Epígrafe</b>  | <b>9</b>  |
| <b>Resumo</b>  | <b>10</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>11</b> |
| <b>Sumário</b>   | <b>12</b> |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>16</b> |
| <b>2 A Supercondutividade</b>  | <b>19</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .   | 20        |
| 2.2 A Resistência Nula num Supercondutor . . . . .                   | 20        |
| 2.3 O Efeito Meisner . . . . .                                       | 23        |
| 2.4 O Diamagnetismo Perfeito . . . . .                               | 24        |
| 2.5 Supercondutores dos tipos I e II . . . . .                       | 25        |
| 2.6 A equação de London . . . . .                                    | 27        |
| 2.6.1 Derivação da Equação de London . . . . .                       | 28        |
| <b>3 A Teoria de Ginzburg-Landau</b>                                 | <b>32</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .   | 33        |
| 3.2 Energia de Condensação . . . . .                                 | 33        |
| 3.3 A Teoria de Ginzburg-Landau na transição de Fase . . . . .       | 38        |
| 3.4 A Teoria de Ginzburg-Landau em Sistemas não Homogêneos . . . . . | 41        |
| 3.5 Superfície de Supercondutores . . . . .                          | 43        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.6      | A teoria de Ginzburg-Landau na presença de um Campo magnético . . . . .     | 44        |
| 3.7      | Simetria de Gauge e Quebra espontânea de Simetria . . . . .                 | 45        |
| <b>4</b> | <b>A eletrodinâmica de Proca</b>  | <b>49</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .  | 50        |
| 4.2      | O eletromagnetismo de Proca . . . . .                                       | 50        |
| 4.2.1    | Equação de onda para os potenciais $\Phi$ e $\vec{A}$ . . . . .             | 53        |
| 4.2.2    | Ondas Planas . . . . .  | 54        |
| 4.3      | O Parâmetro $\xi$ . . . . .   | 55        |
| 4.4      | Análise da quarta equação de Proca . . . . .                                | 57        |
| <b>5</b> | <b>Unindo o Fim e o Começo</b>  | <b>59</b> |
| 5.1      | Comparação do parâmetro $\xi$ das equações de Proca e da teoria de London . | 60        |
| 5.2      | Considerações finais e trabalhos futuros . . . . .                          | 61        |



# Capítulo 1

## Introdução



*Se o fóton tivesse massa qual seria seu valor?*

Essa é uma pergunta deveras capciosa e que nos últimos anos tem despertado a atenção dos físicos. A natureza que estudamos está a margem desta possibilidade, uma vez que a enxergamos com fótons desprovidos de massa e, ainda, utilizamos desta propriedade para benefício próprio, via aplicações em física e, conseqüentemente, em engenharia.

O eletromagnetismo da maneira como conhecemos “nasceu” do estudo da força entre corpos carregados, feito por Coulomb e Cavendish há cerca de 260 anos atrás. Em seus estudos e análises, estes chegaram a uma relação para força entre dois corpos carregados que é:

$$F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}, \quad (1.1)$$

ou seja, a força elétrica é proporcional ao produto das cargas elétricas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Mais tarde, o inglês James Clerk Maxwell, constrói um conjunto de equações que definem o eletromagnetismo. Este conjunto de equações se baseia no fato de termos forças eletromagnéticas que dependem, inversamente do quadrado da distância entre os corpos. As equações de Maxwell são também invariantes em relação a uma transformação de calibre, ou seja, uma transformação que mantém a intensidade dos campos a inalterada.

A lei do inverso do quadrado funciona muito bem quando olhamos para sistemas com alcance entre  $0,01m$  e  $10^7m$ . Abaixo deste limite, é necessário que utilizemos outras ferramentas, como por exemplo a mecânica quântica. Quando estudamos limites ainda mais baixos, é necessário que recorramos à mecânica quântica relativística [7].

Para tanto, vamos trabalhar no capítulo 01 a supercondutividade, que é o fenômeno em que vamos estudar a possibilidade de existência de fótons massivos. Neste capítulo, abordaremos o estado supercondutor da matéria, os fenômenos associados aos supercondutores como o efeito Meisner e a teoria de London para supercondutores metálicos.

No capítulo 03 abordaremos a teoria de Ginzburg-Landau, onde estudamos o fenômeno da supercondutividade através de uma transição de fase termodinâmica.

No capítulo 04 a abordagem do eletromagnetismo para fótons massivos através da teoria de Maxwell-Proca. Neste estudo iremos encontrar uma radiação massiva, puramente teórica.

No capítulo 05 iremos comparar o parâmetro teórico abordado na teoria de Proca com um parâmetro extraído da teoria de London para supercondutores. Através dessa com-

paração, traçaremos valores para uma possível massa do fóton com valores experimentais de comprimentos de penetração em supercondutores.

Iremos utilizar o sistema natural de unidades, ou seja  $\hbar = c = 1$ .

## Capítulo 2

# A Supercondutividade

## 2.1 Introdução

O estado supercondutor da matéria foi descoberto no início do século XX e já é amplamente utilizado no mundo moderno. O estado supercondutor é alcançado, em certas amostras, quando baixamos sua temperatura para uma temperatura fixa para cada tipo de amostra, chamada de crítica ( $T_c$ ). Como consequência, a amostra perde totalmente sua resistividade e passa ter correntes perpétuas em seu interior.

As primeiras amostras supercondutoras foram os metais [20]. A princípio seria muito difícil de se conseguir aplicações práticas, pois os metais se tornam supercondutores a temperaturas extremamente baixas, tipo  $19K$ , dificultando a aplicação em temperaturas ambientes.

Anos mais tarde, descobriu-se que algumas ligas cerâmicas se tornavam supercondutoras a temperaturas mais altas, como  $120K$ . Essa descoberta tornou um pouco mais palpável a busca por aplicações práticas para os supercondutores.

Para que uma amostra se torne supercondutora, devemos ter a presença de dois fenômenos: a resistividade do material se anular e o campo magnético no interior da amostra ser completamente expulso, ou seja, não há campo no interior da amostra quando ela ocupa o estado supercondutor. Podemos fazer considerações importantes acerca dos dois fenômenos citados, que fazem com que tenhamos um novo estado da matéria: o estado supercondutor [21]. Uma motivação suficiente para se estudar os supercondutores é, por conta de sua resistividade nula, o transporte de energia sem perdas, tornando as amostras supercondutoras ricas em aplicações [15]

## 2.2 A Resistência Nula num Supercondutor

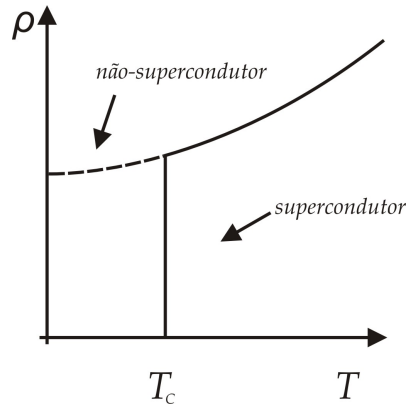
Se a resistência num supercondutor é nula, então podemos afirmar que este material fica com uma condutividade infinita [27], uma vez que:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (2.1)$$

A lei de Ohm, no entanto, nos diz que a densidade de corrente elétrica é proporcional ao campo elétrico por meio da condutividade elétrica do material:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.2)$$

Como teremos uma condutividade infinita, precisamos que nosso campo elétrico no interior da amostra seja nulo para que tenhamos uma densidade de corrente constante.



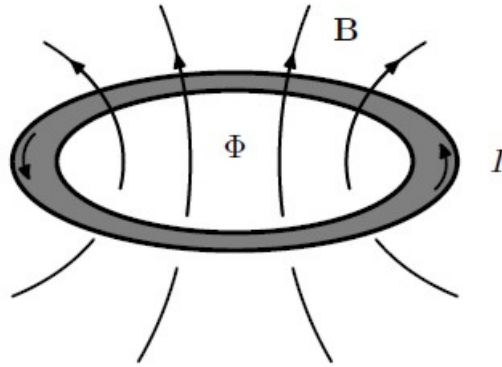
**Figura 2.1:** Gráfico de uma amostra alcançando o estado supercondutor

É possível perceber pelo gráfico acima, que quando uma amostra atinge a temperatura crítica, sua resistividade cai a zero abruptamente. Isso significa que temos uma transição de fase termodinâmica de um estado para o outro.

Em algumas amostras supercondutoras de altas temperaturas, é possível perceber que quando a temperatura se aproxima da temperatura crítica, ainda temos alguns valores de resistividade diferentes de zero. Estes valores aparecem por conta das flutuações termodinâmicas críticas associadas a transição de fase. A temperatura precisa da transição de fase termodinâmica  $T_c$  é definida como sendo a temperatura em que a resistividade na amostra se torna igual a zero.

Ao tratar do estudo dos supercondutores, um questionamento pode ser feito: É possível termos um valor de resistividade exatamente igual a zero? Ou os valores dessa resistividade simplesmente tendem a zero? Uma resposta suficientemente convincente para estas perguntas vem da experiência com a observação de **correntes persistentes**. Se olharmos para um fio supercondutor conforme o da figura abaixo, podemos perceber que a corrente não para de circular no fio. Isso ocorre por que como não há dissipação de energia, o campo magnético no centro do anel permanece constante e a corrente nunca decai.

Para pensarmos nestas correntes persistentes, vamos analisar o fluxo do campo magnético no centro do anel, onde a transição para o estado supercondutor já se deu.



**Figura 2.2:** Anel supercondutor com uma corrente  $I$ .

O fluxo de campo magnético é dado por:

$$\Phi = \int \vec{\mathbb{B}} \cdot \hat{n} dS, \quad (2.3)$$

onde  $\hat{n}dS$  é um vetor perpendicular ao plano do anel. Utilizando a equação diferencial de Maxwell, temos:

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} \quad (2.4)$$

usando o teorema de Stokes:

$$\int (\nabla \times \vec{\mathbb{E}}) \cdot \hat{n} dS = \oint \vec{\mathbb{E}} \cdot d\vec{r} \quad (2.5)$$

teremos:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{\mathbb{E}} \cdot d\vec{r}. \quad (2.6)$$

A integral do lado esquerdo da equação é fechada no interior do anel condutor. Nesta Região o campo elétrico é nulo, o que faz com que

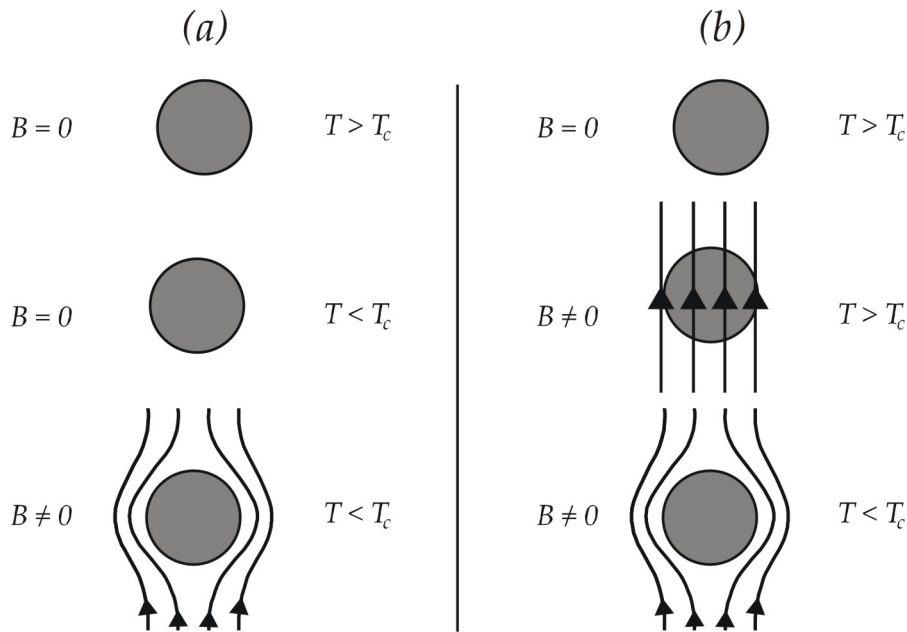
$$\frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (2.7)$$

Este resultado nos mostra que o fluxo do campo magnético no centro do anel permanece constante com relação ao tempo. O campo magnético é gerado, então, por uma corrente elétrica que permanece constante com o passar do tempo. Se houvesse uma resistência no anel, então a corrente iria diminuir gradualmente, fazendo com que houvesse uma variação do fluxo de campo magnético no centro do anel.

## 2.3 O Efeito Meisner

Conforme já mencionado anteriormente, o fato de termos resistividade nula não define uma amostra como sendo supercondutora. Concomitantemente com este fato, devemos ter a presença do efeito Meisner [19].

Neste efeito, o campo magnético é expulso do interior da amostra supercondutora. Imaginemos uma amostra sob ação de um campo magnético externo, conforme figura abaixo.



**Figura 2.3:** Campo magnético externo numa amostra condutora, depois de resfriá-la (a), e antes de resfriá-la (b)

Quando a amostra está a uma temperatura maior que a temperatura crítica e aplicamos um campo magnético externo fraco, este campo penetra na amostra livremente. Se baixarmos a temperatura até a temperatura crítica, então uma blindagem magnética é gerada no material. Esta blindagem impossibilita que o campo magnético penetre no material enquanto ele estiver no estado supercondutor. Um fato extremamente interessante é que se baixarmos a temperatura até a temperatura crítica e depois aplicarmos o campo magnético, a blindagem ocorre da mesma maneira!

O efeito Meisner faz com o que o estado supercondutor se torne, efetivamente, um novo estado da matéria com propriedades muito singulares. Além disso, a transição do estado normal para o estado supercondutor é uma transformação termodinâmica reversível.

## 2.4 O Diamagnetismo Perfeito

Para que o campo magnético no interior da amostra mantenha-se nulo, é preciso que haja um campo, gerado internamente, que seja contrário ao campo externo aplicado a amostra. Este campo gerado internamente provavelmente se dá pelas correntes que circulam nas bordas da amostra.

Iremos descrever estas correntes através das equações de Maxwell num meio magnético. A corrente total será dividida em uma corrente externa, responsável pelo campo externo, e numa corrente interna, responsável pelo campo interno. Logo:

$$\vec{j} = \vec{j}_{ext} + \vec{j}_{int} \quad (2.8)$$

As correntes internas produzem uma magnetização na amostra, de modo que

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_{int} \quad (2.9)$$

O campo aplicado pode ser definido pela corrente externa pela equação:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{ext} \quad (2.10)$$

Os vetores de campo magnético  $\vec{M}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  são relacionados pela equação:

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.11)$$

Vamos imaginar que nossa amostra supercondutora esteja num solenoide infinito, onde  $n$  é o número de voltas por unidade de comprimento. O campo  $\vec{H}$  produzido no interior da amostra é dado por  $I n \hat{k}$  e o campo  $\vec{B} = 0$  por conta do efeito Meisner. Deste modo, a equação (2.11) fica:

$$\vec{M} = -\vec{H} \quad (2.12)$$

Definindo a suscetibilidade magnética como sendo

$$\chi = \left. \frac{M}{H} \right|_{H=0} \quad (2.13)$$

Utilizando (2.13) em (2.12), temos:

$$\chi = -1. \quad (2.14)$$



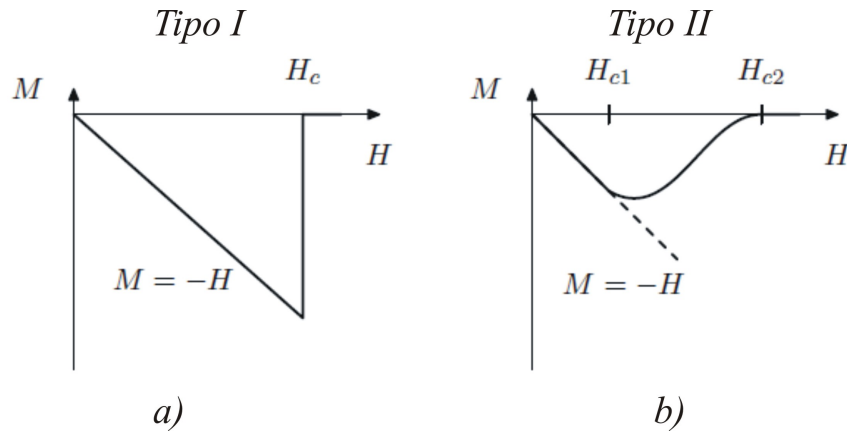
Materiais que são diamagnéticos possuem  $\chi < 0$  e os paramagnéticos possuem  $\chi > 0$ . Materiais que apresentam  $\chi = -1$  são chamados de diamagnéticos perfeitos; o diamagnetismo perfeito é uma característica dos materiais supercondutores, pois resulta do campo magnético expulso do interior da amostra.

## 2.5 Supercondutores dos tipos I e II

Conforme representado na equação (2.12), a magnetização é uma função do campo  $\vec{H}$ . De acordo com este fato, temos dois tipos de supercondutores que possuem diferentes relações entre este estado, o supercondutor, e o campo aplicado.

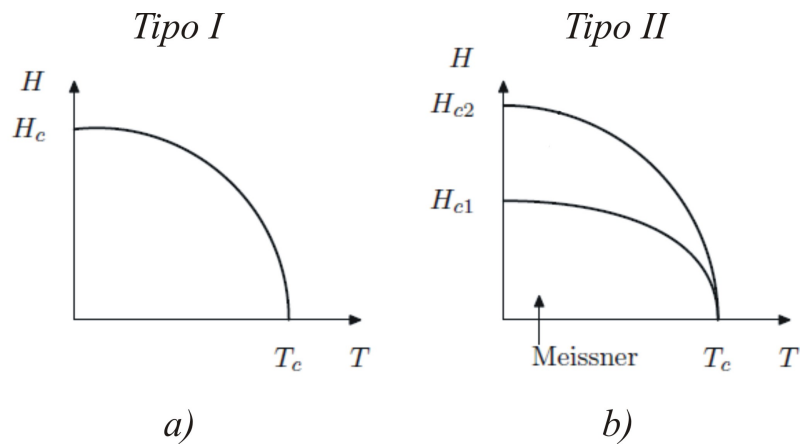
Nos supercondutores do tipo I, o estado supercondutor é alcançado para campos fracos. À medida que aumentamos o campo aplicado, diminuimos a magnetização da amostra, até que um campo crítico ( $H_c$ ) é alcançado, de modo que a magnetização da amostra vai a zero e o estado supercondutor é destruído.

Nos supercondutores do tipo II temos a presença de dois campos críticos: o campo crítico inferior ( $H_{c1}$ ) e o campo crítico superior ( $H_{c2}$ ) [4]. Conforme aumentamos o campo aplicado, enquanto o campo crítico inferior não é alcançado, temos um comportamento muito parecido com o dos supercondutores do tipo I. Quando o campo aplicado é maior que o campo crítico inferior, então o estado supercondutor começa a ser destruído, mas a magnetização não vai a zero instantaneamente. Ela aumenta até que o campo crítico superior é alcançado e a amostra fica com magnetização nula e, conseqüentemente, sai do estado supercondutor.



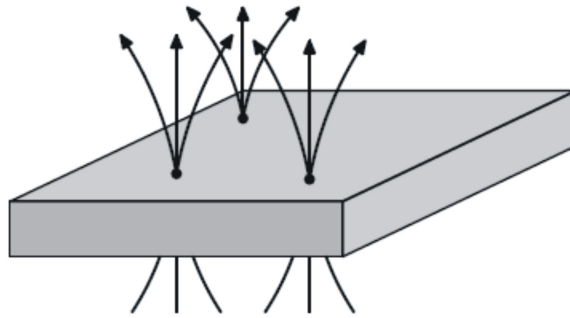
**Figura 2.4:** a) Supercondutor do tipo I, onde a magnetização na amostra vai a zero instantaneamente quando o campo aplicado chega ao campo crítico; b) Supercondutor do tipo II, onde o campo crítico inferior é alcançado e a amostra vai perdendo seu caráter supercondutor, até que o campo crítico superior é alcançado e a amostra perde totalmente a magnetização e, com isso, o estado supercondutor.

Como função da temperatura, todos os campos vão a zero quando a temperatura se aproxima da temperatura crítica. Isso é perfeitamente compreensível, uma vez que a amostra se torna supercondutora quando a temperatura crítica é alcançada. Os gráficos abaixo mostram como os campos se comportam em função da temperatura.



**Figura 2.5:** a) Supercondutor do tipo I, o campo vai a zero quando a temperatura se aproxima da temperatura crítica; b) os dois campos críticos, inferior e superior, vão a zero quando a temperatura se aproxima da temperatura crítica.

A região entre os campos críticos inferior e superior nos supercondutores do tipo II possui uma interessante explicação física. O campo magnético penetra na amostra na forma de vórtices.



**Figura 2.6:** Vértices supercondutores, onde há campo magnético devido às supercorrentes.

Cada vértice consiste numa região onde uma supercorrente gira ao redor de um ponto. Neste ponto o campo magnético aplicado penetra e as correntes supercondutoras servem para “expulsá-lo” da amostra.

## 2.6 A equação de London

A primeira teoria para supercondutores que “cobria” o efeito Meisner foi uma teoria desenvolvida pelos irmãos F. London e H. London, em 1935 [17]. Nesta teoria eles assumiram que quando uma amostra se torna supercondutora ela possui duas densidades de elétrons: os elétrons supercondutores e os elétrons normais. Sendo assim teremos uma densidade total de elétrons dada por  $n = n_n + n_s$ , onde  $n_n$  são os elétrons normais e  $n_s$  são os elétrons supercondutores.

Com este modelo simples, os irmãos London chegaram a uma equação que associa a densidade de corrente em uma amostra supercondutora com o potencial vetor magnético. Esta equação é dada por:

$$\vec{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \vec{A} \quad (2.15)$$

Para chegarmos a esta equação, iremos repensar o modelo de Drude [16] para condução de elétrons num condutor. O repensar se dará por conta de nossa análise para frequências finitas dos campos elétricos. Usando a representação complexa, temos:

$$\vec{j} e^{-i\omega t} = \sigma(\omega) \vec{E} e^{-i\omega t} \quad (2.16)$$

onde a condutividade também é um número complexo. A sua parte real corresponde a correntes que estão em fase com o campo elétrico aplicado (resistiva) e a parte imaginária

corresponde a correntes que estão fora de fase com o campo (indutiva ou capacitiva).

Generalizando o modelo de Drude para o caso que estamos analisando, temos:

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (2.17)$$

Tomando a parte real, temos:

$$Re[\sigma(\omega)] = \frac{ne^2}{m} \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.18)$$

Integrando sobre todas as frequências, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Re[\sigma(\omega)]d\omega = \frac{\pi ne^2}{m} \quad (2.19)$$

ou seja, um resultado constante independente do tempo  $\tau$ .

Em sua teoria, os irmãos London [17] postularam que a parte real da condutividade estava associada aos elétrons supercondutores por estarem a um tempo  $\tau \rightarrow \infty$ , por não termos dissipação de corrente. A parte imaginária seria aquela em que haveria ainda um tempo  $\tau$  finito. Eles assumiram que a parte com os elétrons supercondutores estariam ocupando os estados de frequência nula, representado por uma delta de Dirac do seguinte modo [1]:

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi n_s e^2}{m_e} \delta(\omega) - \frac{n_s e^2}{i\omega m_e} \quad (2.20)$$

### 2.6.1 Derivação da Equação de London

Para derivarmos a equação de London, iniciaremos com a lei de Ohm, onde  $\vec{j} = \sigma \vec{\mathbb{E}}$ , onde a condutividade é uma função da frequência. Tomando o rotacional dos dois lados da equação, temos:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{j}) e^{-i\omega t} &= \sigma(\omega) (\nabla \times \vec{\mathbb{E}}) e^{-i\omega t} \\ &= -\sigma(\omega) \frac{d\vec{\mathbb{B}} e^{-i\omega t}}{dt} \end{aligned}$$

Integrando o lado esquerdo desta equação com relação ao tempo:

$$(\nabla \times \vec{j}) e^{-i\omega t} = i\omega\sigma(\omega)\vec{\mathbb{B}}e^{-i\omega t} \quad (2.21)$$

Utilizando (2.20), temos:

$$\left(\nabla \times \vec{j}\right) e^{-i\omega t} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \vec{\mathbb{B}} e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

Traçando o mesmo raciocínio para  $\omega = 0$ , temos:

$$\nabla \times \vec{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \vec{\mathbb{B}} \quad (2.23)$$

Utilizando a equação de Maxwell  $\nabla \times \vec{\mathbb{B}} = \mu_o \vec{j}$ , temos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbb{B}} = -\mu_o \frac{n_s e^2}{m_e} \vec{\mathbb{B}} \quad (2.24)$$

É comum reescrevermos o coeficiente do vetor campo magnético do lado direito da equação como sendo

$$\xi = \frac{\mu_o n_s e^2}{m_e} \quad (2.25)$$

que nos fornece:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbb{B}} = -\xi \vec{\mathbb{B}} \quad (2.26)$$

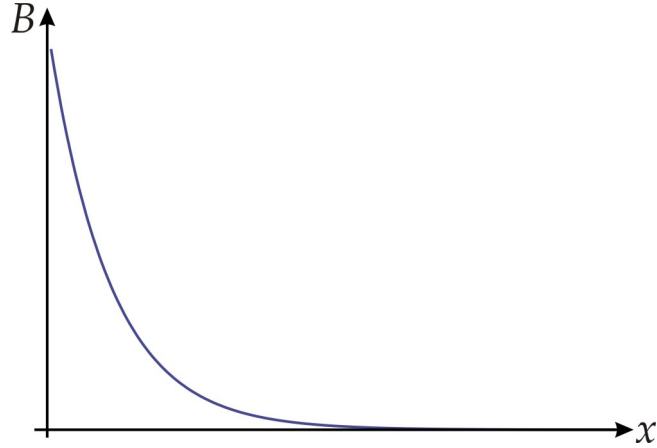
Utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbb{B}} = \nabla \cdot \underbrace{\nabla \vec{\mathbb{B}}}_{=0} - \nabla^2 \vec{\mathbb{B}}$ , temos:

$$-\nabla^2 \vec{\mathbb{B}} = -\xi \vec{\mathbb{B}} \quad (2.27)$$

A solução de (2.27) é dada por:

$$\vec{\mathbb{B}} = \vec{\mathbb{B}}_1 e^{\xi x} + \vec{\mathbb{B}}_2 e^{-\xi x} \quad (2.28)$$

A equação (2.28) se refere a um campo no interior da amostra. Como vimos, no entanto, o efeito Meisner blind a amostra magneticamente, fazendo com que não haja campo no interior dela e, este fato, faz com que desprezemos totalmente a primeira parte da equação para o campo magnético (2.28). A segunda parte, no entanto, se refere a uma parcela do campo magnético que decresce enquanto adentramos na amostra. Podemos perceber, então, que o campo magnético penetra numa pequena região da amostra até tender a zero totalmente, estando em acordo com o efeito Meisner para supercondutores.



**Figura 2.7:** Dependência do campo magnético com a distância no interior da amostra

A quantidade  $\xi$  está associada com o quanto o campo magnético penetra na amostra [29]. Podemos definir a profundidade da penetração de campo magnético na amostra como sendo,

$$\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (2.29)$$

com  $\lambda$  sendo chamado de comprimento de penetração de campo magnético na amostra supercondutora.

Vamos discutir os resultados da equação de London em termos do vetor potencial magnético. Se utilizarmos a relação entre campo magnético e potencial vetor magnético  $\nabla \times \vec{A} = \vec{\mathbb{B}}$  nos dois lados da equação (2.26), teremos:

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\xi \nabla \times \vec{A}, \quad (2.30)$$

ou seja,

$$\nabla \times (\nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}) = \nabla \times (-\xi \vec{A}). \quad (2.31)$$

Esta equação nos fornece uma solução parecida com a solução para o campo magnético. Logo teremos uma pequena penetração do potencial vetor magnético na amostra com a forma:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-\xi x} \quad (2.32)$$

É interessante frisar que esta equação é válida com a escolha adequada do gauge para o vetor potencial  $\vec{A}$ . Lembrando que a equação  $\nabla \times \vec{A} = \vec{\mathbb{B}}$  é válida se fizermos uma

---

transformação  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \nabla\chi$  e obtivermos o mesmo campo magnético  $\vec{B}$ .

## Capítulo 3

# A Teoria de Ginzburg-Landau



## 3.1 Introdução

Já vimos que o estado supercondutor pode ser encarado como um novo estado da matéria com algumas propriedades, como o diamagnetismo perfeito, por exemplo. É possível olharmos para a transição de fase entre os estados metálico e supercondutor, como se fossem fases termodinâmicas. Cada fase é caracterizada de maneira específica, como o calor específico da amostra e sua temperatura crítica.

Esta interpretação para a transição para a fase supercondutora da amostra foi feita por Landau e Ginzburg em 1950 [9] e leva em conta as flutuações termodinâmicas no sistema e, por isso, é um tipo de Teoria de Campos termodinâmica.

Um fato importante de se notar é que em supercondutores de baixas temperaturas as flutuações termodinâmicas são praticamente inexistentes e, por isso, podem ser desprezadas. As flutuações termodinâmicas consideráveis são as que ocorrem em supercondutores cerâmicos de altas temperaturas e serão estes os alvos de nosso estudo neste capítulo.

## 3.2 Energia de Condensação

Iremos, agora, observar algumas importantes propriedades termodinâmicas sobre a transição de fase supercondutora. É possível escrevermos os diagramas da fase supercondutora da mesma maneira que fazemos com os gases.

Para os gases, nossas variáveis são a pressão ( $p$ ) e o volume ( $V$ ). Para o estado supercondutor iremos utilizar as variáveis magnéticas, como o campo aplicado ( $\vec{H}$ ) e a magnetização ( $\vec{M}$ ) como variáveis relevantes.

Consideremos um solenoide infinito. O campo gerado por ele é dado por:

$$\vec{H} = ni\hat{k}, \quad (3.1)$$

onde “ $n$ ” é o número de voltas no solenoide por unidade de comprimento, e “ $i$ ” a corrente elétrica no fio.

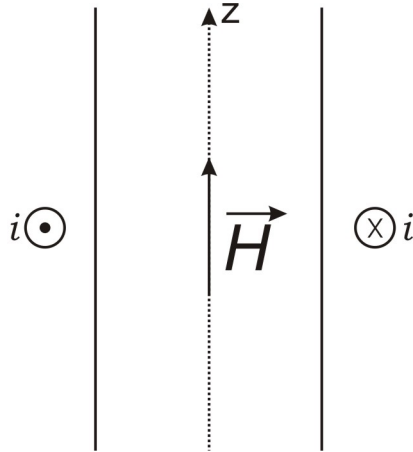


Figura 3.1: Campo magnético num solenoide infinito

Podemos escrever o trabalho como sendo:

$$dW = -nL\epsilon dt. \quad (3.2)$$

Como a força eletromotriz  $\epsilon = -\frac{d\phi}{dt}$ , então:

$$dW = nL\frac{d\phi}{dt}dt \Rightarrow dW = nLd\phi \quad (3.3)$$

O fluxo do campo magnético por uma superfície é  $\vec{\mathbb{B}} \cdot \hat{k} dS$ . Logo  $d\phi = d\vec{\mathbb{B}} \cdot \hat{k} S$ . Logo:

$$dW = \underbrace{LS}_{\text{volume } V} \underbrace{ni\hat{k}}_{\vec{H}} \cdot d\vec{\mathbb{B}} \quad (3.4)$$

$$dW = V\vec{H} \cdot d\vec{\mathbb{B}} \quad (3.5)$$

Podemos, ainda, escrever o campo magnético  $\vec{\mathbb{B}}$  em função do campo aplicado  $\vec{H}$  e da magnetização  $\vec{M}$  através da expressão:

$$\vec{\mathbb{B}} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \quad (3.6)$$

$$d\vec{\mathbb{B}} = \mu_o (d\vec{H} + d\vec{M}) \quad (3.7)$$

Reescrevendo a expressão para o trabalho, temos:

$$dW = \mu_o (\vec{H} \cdot d\vec{M} + \vec{H} \cdot d\vec{H}). \quad (3.8)$$

A nossa expressão para o trabalho ficou em função das variáveis que consideramos relevantes  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$ . Cada contribuição é dotada de um significado físico:

- $\vec{H}.d\vec{M}$ : É o trabalho magnético por unidade de volume feito sobre a amostra.
- $\vec{H}.d\vec{H}$ : É o trabalho realizado mesmo se não houvesse amostra no interior da região estudada. Uma espécie de auto indutância.

Se imaginarmos que não há amostra no interior do solenoide, então  $\vec{M} = \vec{0}$  e, logo, percebemos que o termo  $\vec{H}.d\vec{H}$  equivale à energia do campo magnético no vácuo, pois  $\vec{B} = \mu_o\vec{H}$ . Evidentemente este não é nosso caso e, portanto, não iremos incluir o termo de vácuo, pois a amostra deve existir (!!!).

Como podemos utilizar os diagramas de fase termodinâmicos, vamos lançar mão de uma analogia com uma importante relação termodinâmica: A primeira Lei. Deste modo:

$$dU = TdS + \mu_oV\vec{H}.d\vec{H}, \quad (3.9)$$

Já que o segundo termo do lado direito da equação representa o trabalho sobre a amostra. Na termodinâmica, escrevemos a energia interna do sistema como sendo função da entropia e do volume  $U(S, V)$ , pois

$$dU = TdS - pdV.$$

No nosso caso, é conveniente escrevermos que a energia interna se torna função da entropia e da magnetização na amostra. Logo  $U \equiv U(S, \vec{M})$ . Desse modo, é possível escrevermos a temperatura e o campo aplicado da seguinte maneira:

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (3.10)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_oV} \frac{\partial U}{\partial \vec{M}} \quad (3.11)$$

Analisando nossas equações do ponto de vista experimental, vimos que demanda uma grande habilidade para medirmos diretamente grandezas como entropia e magnetização. É conveniente buscarmos grandezas que tenham um trato experimental mais simples, de modo que nossa teoria tenha uma fácil aplicação e, conseqüentemente, nossos resultados

tenham mais fácil verificação. Definamos as energias livres de Gibbs e Helmholtz [3] como sendo:

$$F(T, \vec{M}) = U - TS \quad (3.12)$$

$$G(T, \vec{H}) = U - TS - \mu_o V \vec{H} \cdot \vec{M}. \quad (3.13)$$

Diferenciando a energia livre de Gibbs, temos:

$$dG(T, \vec{H}) = -SdT - \mu_o V d\vec{H} \cdot \vec{M}. \quad (3.14)$$

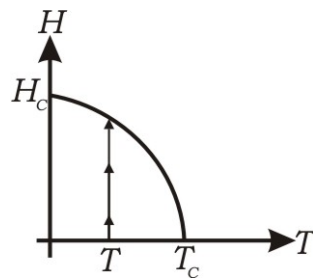
Esta equação nos permite escrever:

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \quad (3.15)$$

$$\vec{M} = -\frac{1}{\mu_o V} \frac{\partial G}{\partial \vec{H}} \quad (3.16)$$

A energia livre de Gibbs torna-se mais conveniente, pois depende de parâmetros que podem ser controlados mais facilmente, como a temperatura e o campo aplicado. Além disso, através da energia livre de Gibbs podemos obter a energia livre total  $F(T, \vec{M})$  e a energia interna.

Com a energia livre de Gibbs, nós podemos calcular a diferença de energia livre entre os estados normal e supercondutor. Para o caso de supercondutores do tipo I, temos:



**Figura 3.2:** Gráfico do campo aplicado em função da temperatura, ressaltando os pontos críticos para o campo aplicado e para a temperatura.

Este cálculo será feito ao longo da linha vertical, onde  $dT = 0$ . Pelo efeito Meisner, temos  $\vec{M} = -\vec{H}$  e, logo:

$$G_s(T, \vec{H}) - G_s(T, 0) = \int_0^{H_c} dG = -\mu_o V \int_0^{H_c} \vec{M} d\vec{H} \quad (3.17)$$

$$G_s(T, \vec{H}) - G_s(T, 0) = V\mu_o \frac{\vec{H}_c \cdot \vec{H}_c}{2} \quad (3.18)$$

A temperatura crítica, os estados supercondutor e normal estão em equilíbrio termodinâmico. Deste modo, a energia livre de Gibbs é a mesma em ambos estados. Logo:

$$G_s(T, \vec{H}) \cong G_n(T, \vec{H})$$

No estado normal, a diferença de energia livre de Gibbs entre  $\vec{H} = 0$  e  $\vec{H} = \vec{H}_c$  fica:

$$G_n(T, \vec{H}_c) - G_n(T, 0) = -\mu_o V \int_0^{H_c} \vec{M} d\vec{H} \quad (3.19)$$

A questão é que no estado normal temos  $\vec{M} = 0$ . Logo:

$$G_n(T, \vec{H}_c) - G_n(T, 0) = 0 \quad (3.20)$$

A diferença total de energia entre os estados normal e supercondutor fica:

$$\begin{aligned} G_n(T, \vec{H}_c) - G_n(T, 0) &= G_s(T, \vec{H}_c) + G_s(T, 0) = 0 - \mu_o V \frac{\vec{H}_c \cdot \vec{H}_c}{2} \\ \underbrace{G_n(T, \vec{H}_c) - G_s(T, \vec{H}_c)}_{=0} &= G_n(T, 0) + G_s(T, 0) = -\mu_o V \frac{\vec{H}_c \cdot \vec{H}_c}{2} \\ G_s(T, 0) - G_n(T, 0) &= -\mu_o V \frac{\vec{H}_c \cdot \vec{H}_c}{2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Este é um estado de mínima energia do sistema.

A quantidade  $\mu_o V \frac{\vec{H}_c \cdot \vec{H}_c}{2}$  é o que chamamos de energia de condensação. Fisicamente, sua interpretação pode ser dada como o ganho de energia livre por unidade de volume no estado supercondutor comparado ao estado normal à mesma temperatura.

Vamos testar nossa teoria com um exemplo real. Considerando o nióbio, sabemos que seu campo crítico é  $160kA/m$ , com temperatura crítica  $9K$ . A energia de condensação fica:

$$\frac{\mu_o H_c^2}{2} = 16,5kJ/m^3$$

Como o nióbio possui um cristal com estrutura bcc de  $0, 33mm$ , temos condições de afirmar que o condensado de energia é cerca de  $2\mu eV$  por átomo.

É possível determinarmos a diferença de entropia entre os estados supercondutor e normal da amostra. Começando pela energia livre de Gibbs:

$$\begin{aligned}
 G &= -TS - \mu_o V \vec{H}_c \cdot \vec{M} + U \\
 dG &= -SdT + \mu_o V \vec{H}_c \cdot \vec{H}_c \\
 SdT &= -dG + \mu_o V \vec{H}_c \cdot d\vec{H}_c \\
 S &= -\frac{dG}{dT} + \mu_o V \vec{H}_c \cdot \frac{d\vec{H}_c}{dT} \\
 S_s(T, \vec{H}_c) - S_n(T, \vec{H}_c) &= -\mu_o V \vec{H}_c \cdot \frac{d\vec{H}_c}{dT}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

### 3.3 A Teoria de Ginzburg-Landau na transição de Fase

A teoria de Ginzburg-Landau para os supercondutores é construída através de um “*approach*” da teoria de transição de fase de segunda ordem, desenvolvida por Landau em 1930. Nesta teoria Landau nos diz que, tal qual o momento magnético, que é nulo acima da temperatura crítica ( $T_c$ ) e diferente de zero abaixo dela, existe um parâmetro de ordem que é nulo acima desta temperatura e diferente de zero abaixo dela.

Para a supercondutividade, a teoria de Ginzburg-Landau nos diz que o parâmetro de ordem existe e é denotado por  $\psi$ . Este parâmetro caracteriza o estado supercondutor, assim como a magnetização caracteriza o ferromagnetismo. O parâmetro de ordem é tal que caracteriza o estado do sistema: nulo se o estado é normal e diferente de zero para o estado supercondutor.

$$\psi = \begin{cases} 0, & T > T_c \\ \psi(T) \neq 0, & T < T_c \end{cases}$$

A teoria de Ginzburg-Landau nos diz também que a quantidade  $\psi$  é representado por valores complexos. Este fato está de acordo com a teoria BCS microscópica dos supercondutores, onde o termo  $\psi$  aparece identicamente, a menos de algumas constantes. A quantidade  $|\psi|^2$  tem a interpretação de densidade de pares de Cooper da teoria BCS [2] presentes na amostra.

Na teoria de Ginzburg-Landau acredita-se que a energia livre dependa suavemente do parâmetro  $\psi$ . Evidentemente a energia precisa ser real e, portanto, a energia irá depender do módulo do parâmetro de ordem. Além disso, a medida que o parâmetro de ordem vai a zero na temperatura crítica, nós podemos expandir a energia livre em termos de  $|\psi|$ . Para temperaturas próximas a temperatura crítica, apenas os dois primeiros termos se tornam relevantes. Logo, a densidade de energia livre é dada por:

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\psi|^4 \quad (3.23)$$

Os parâmetros  $a(T)$  e  $b(T)$  são funções da temperatura e o sinal de cada um deles é decisivo. Vamos assumir que  $b(T)$  é positivo e que o parâmetro  $a(T)$  tenha sinal dependente da temperatura.

Pensando na possibilidade de  $a(T)$  ser positivo, precisamos encontrar um mínimo para  $f_s - f_n$ . Analisando a equação (3.23), temos que, neste caso, o mínimo se encontra quando  $\psi = 0$ . Quando  $a(T)$  é menor que zero, então podemos ter um mínimo diferente para  $f_s - f_n$ . Derivando a equação (3.23) com relação ao parâmetro de ordem e igualando a zero, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\psi}(f_s - f_n) &= 2a(T)|\psi| + 2b(T)|\psi|^3 = 0 \\ |\psi|^2 &= -\frac{a(T)}{b(T)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

O sinal de  $a(T)$  está associado diretamente à temperatura do sistema: se  $T > T_c$ , então  $a(T) > 0$  e não há parâmetro de ordem; se  $T < T_c$ , então  $a(T) < 0$  e temos um parâmetro de ordem que nos fornece um valor mínimo para  $f_s - f_n$  diferente de zero. Para este último caso, temos:

$$\begin{aligned} f_s(T) - f_n(T) &= -a(T) \frac{a(T)}{b(T)} + \frac{b(T)}{2} \frac{a^2(T)}{b^2(T)} \\ f_s(T) - f_n(T) &= -\frac{a^2(T)}{2b(T)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Já previmos anteriormente que os parâmetros  $a(T)$  e  $b(T)$  variam suavemente com a temperatura. Deste modo, podemos fazer:

$$a(T) \cong \dot{a}(T - T_c) + \dots \quad (3.26)$$

$$b(T) \cong b + \dots \quad (3.27)$$

Podemos agora, escrever (3.24) com a nova ideia (3.26). Logo

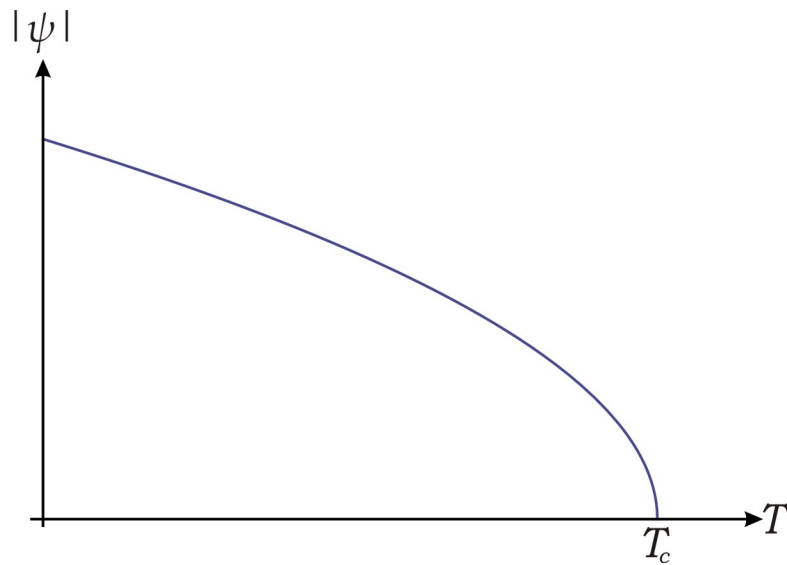
$$|\psi|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)} \Rightarrow |\psi|^2 = -\frac{\dot{a}(T - T_c)}{b} \quad (3.28)$$

Logo:

$$|\psi| = \sqrt{\frac{\dot{a}}{b}} \sqrt{T_c - T} \quad (3.29)$$

Note que  $|\psi|$  só existe para  $T < T_c$ . De maneira geral, temos:

$$|\psi| = \begin{cases} \sqrt{\frac{\dot{a}}{b}} \sqrt{T_c - T} & , \quad T < T_c \\ 0 & , \quad T > T_c \end{cases}$$



**Figura 3.3:** Gráfico do módulo do parâmetro de ordem com relação à temperatura. Queda abrupta da função quando  $T \rightarrow T_c$

A diferença da densidade de energia para  $T - T_c$  é dada por (3.24) e podemos combiná-la com (3.26) e (3.27). Logo:



$$f_s - f_n = -\frac{\dot{a}^2(T - T_c)^2}{2b} \quad (3.30)$$

Esta diferença de densidade de energia livre nos fornece a densidade do condensado de energia. Logo:

$$f_s - f_n = -\frac{\dot{a}^2(T - T_c)^2}{2b} = -\mu_o \frac{\vec{H}_c^2}{2} \quad (3.31)$$

Podemos, então, achar uma expressão para o módulo do campo magnético aplicado, dado por:

$$|\vec{H}_c| = \frac{\dot{a}(T - T_c)}{\sqrt{\mu_o b}} \quad (3.32)$$

para temperaturas próximas à temperatura crítica.

Através da diferença da densidade de energia livre, podemos calcular, também (!), a diferença da densidade de entropia do sistema. Logo:

$$\begin{aligned} s_s - s_n &= \frac{d}{dT}(f_s - f_n) \\ s_s - s_n &= \frac{\dot{a}^2(T - T_c)}{2b} \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.4 A Teoria de Ginzburg-Landau em Sistemas não Homogêneos

Quando olhamos para o parâmetro de ordem, é possível ver que podemos escrevê-lo como uma função da posição. Nesta descrição, adicionaremos na equação para energia livre, um termo dependente do gradiente do parâmetro de ordem [5]. Logo:

$$f_s(T) - f_n(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\vec{r})|^2 + a(T) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \quad (3.34)$$

Note que se  $\psi(\vec{r}) \equiv \psi$ , então retomamos nossa análise inicial para  $a(T)$  e  $b(T)$ . O termo  $m^*$  funciona exatamente como a massa do sistema, associada ao parâmetro de ordem, possuindo as mesmas propriedades de massa.

Iremos, agora, investigar o parâmetro de ordem  $\psi$ . Para que possamos encontrá-lo, vamos minimizar a equação (3.34):

$$F_s(T) - F_n(T) = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\vec{r})|^2 + a(T) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \right] d^3\vec{r} \quad (3.35)$$

Fazendo uma pequena variação no parâmetro de ordem, esperamos uma pequena variação na energia livre. Logo:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &\rightarrow \delta\psi(\vec{r}) + \psi(\vec{r}) \\ F_s(T) &\rightarrow \delta F_s + F_n \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \delta F_s = \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2(\psi(\vec{r}) + \delta\psi(\vec{r}))(\psi^*(\vec{r}) + \delta\psi^*(\vec{r})) + \right. \\ \left. a(T)(\psi(\vec{r}) + \delta\psi(\vec{r}))(\psi^*(\vec{r}) + \delta\psi^*(\vec{r})) + \right. \\ \left. \frac{b(T)}{2} [(\psi(\vec{r}) + \delta\psi(\vec{r}))(\psi^*(\vec{r}) + \delta\psi^*(\vec{r}))]^2 \right\} d^3\vec{r} \end{aligned}$$

Mas, temos:

$$\begin{aligned} (\psi(\vec{r}) + \delta\psi(\vec{r}))(\psi^*(\vec{r}) + \delta\psi^*(\vec{r})) &= |\psi|^2 + \psi(\vec{r})\delta\psi^*(\vec{r}) + \psi^*(\vec{r})\delta\psi(\vec{r}) \\ (\nabla\psi(\vec{r}) + \delta\nabla\psi(\vec{r}))(\nabla\psi^*(\vec{r}) + \delta\nabla\psi^*(\vec{r})) &= |\nabla\psi|^2 + \nabla\psi(\vec{r})\nabla\delta\psi^*(\vec{r}) + \nabla\psi^*(\vec{r})\nabla\delta\psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

A integral, agora, fica:

$$\begin{aligned} \delta F_s(T) = \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\psi(\vec{r}))(\nabla\delta\psi^*(\vec{r})) + a(T)\psi(\vec{r})\nabla\psi^*(\vec{r}) + b(T)|\psi(\vec{r})|^2\psi(\vec{r})\nabla\psi^*(\vec{r}) \right\} d^3\vec{r} + \\ \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\psi^*(\vec{r}))(\nabla\delta\psi(\vec{r})) + a(T)\psi^*(\vec{r})\nabla\psi(\vec{r}) + b(T)|\psi(\vec{r})|^2\psi^*(\vec{r})\nabla\psi(\vec{r}) \right\} d^3\vec{r} \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} \delta F_s = \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi(\vec{r}) + a\psi(\vec{r}) + b\psi(\vec{r})|\psi(\vec{r})|^2 \right\} d^3\vec{r} + \\ \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi^*(\vec{r}) + a\psi^*(\vec{r}) + b\psi^*(\vec{r})|\psi(\vec{r})|^2 \right\}^* d^3\vec{r} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para que tenhamos, de fato, um mínimo, precisamos encontrar uma solução em que  $\delta F_s = 0$ . Ou seja:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + a\psi(\vec{r}) + b\psi(\vec{r})|\psi(\vec{r})|^2 = 0 \quad (3.37)$$

Note que (3.37) é uma equação de Schroedinger não linear. Por conta desta não linearidade da equação, um importante princípio quântico não poderá ser aplicado, que é o princípio de superposição de estados. A solução desta equação também deverá ter uma normalização diferenciada, por conta do termo que torna a equação não linear.

### 3.5 Superfície de Supercondutores

A equação (3.37) vai nos proporcionar importantes aplicações num material no estado supercondutor. Uma delas é estudar o comportamento do parâmetro de ordem supercondutor com perturbações externas. Isso pode ser estudado, ainda, na interface entre o estado supercondutor e o estado normal.

Imaginemos um modelo simples onde os estados supercondutor e normal possam ser analisados num plano cartesiano. À esquerda do eixo  $y$ , temos o estado normal e à direita o estado supercondutor. Esperamos que o parâmetro de ordem seja zero nos 2° e 3° quadrantes e diferente de zero nas demais regiões. Este parâmetro de ordem precisa, ainda, ser solução da equação:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + a(T)\psi(x) + b(T)\psi^3(x) = 0 \quad (3.38)$$

O termo  $b(T)\psi^3(x)$  traz grande complexidade para nosso equação de estados estacionários para o parâmetro de ordem. Reescrevendo esta equação, temos:

$$-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x) + y^3(x) = 0 \quad (3.39)$$

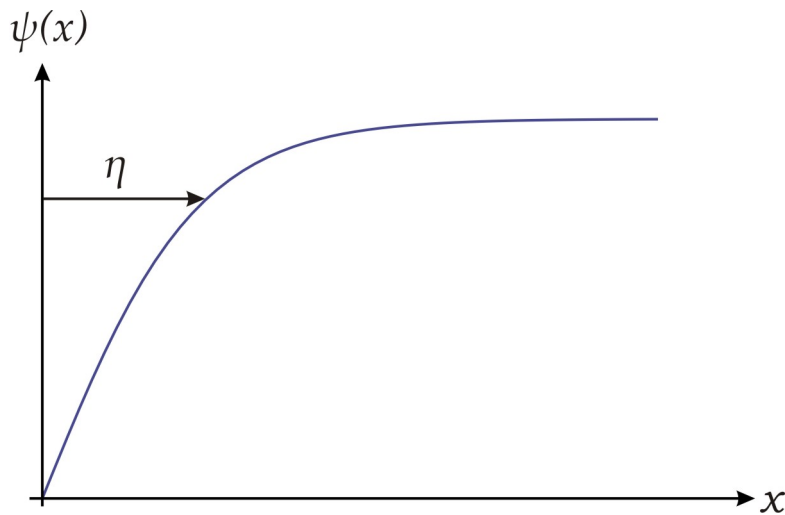
A solução<sup>1</sup> de (3.39) se dá por:

---

<sup>1</sup>A solução desta equação é demasiadamente complexa e, por não ser encontrada na literatura, não estará presente neste trabalho.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_o \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\eta(T)}\right) \\ \eta(T) &= \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|}\right)^2 \\ \psi_o &= \sqrt{\frac{|a(T)|}{b(T)}}\end{aligned}$$

A quantidade  $\eta(T)$  possui unidade de comprimento e é chamado de Comprimento de Coerência de Ginzburg-Landau. Este parâmetro caracteriza o supercondutor e pode ser interpretado como sendo a distância do parâmetro de ordem na superfície do condutor até o seu valor quando ele não é dependente da posição.



**Figura 3.4:** O parâmetro de ordem de um supercondutor próximo à sua superfície. A recobrada do valor  $\psi_o$  ao longo do comprimento de coerência  $\eta(T)$ .

### 3.6 A teoria de Ginzburg-Landau na presença de um Campo magnético

Até agora trabalhamos com supercondutores sobre o prisma da teoria de Ginzburg-Landau desconsiderando os efeitos de carga elétrica. No entanto, esperamos que haja no supercondutor supercorrentes formadas por partículas carregadas. É necessário, então, que analisemos a teoria de Ginzburg-Landau com relação aos campos produzidos por estas partículas carregadas.

Faz-se necessário a introdução de um termo associado ao campo magnético na amostra. Logo, o operador  $\nabla$  para posição sofre a seguinte alteração:

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - q\vec{A}, \quad (3.40)$$

com  $\vec{A}$  sendo o potencial vetor magnético (com  $\vec{\mathbb{B}} = \nabla \times \vec{A}$ ) e  $q$  a carga de cada par de Cooper. A densidade de energia livre fica:

$$f_s = f_n + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla + 2e\vec{A}) \right| + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \quad (3.41)$$

A energia total do sistema fica:

$$F_s = F_n + \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla + 2e\vec{A}) \right| + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right\} d^3\vec{r} \quad (3.42)$$

Vamos agora calcular a densidade de corrente elétrica através da seguinte derivada funcional:

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= -\frac{\partial F_s[\vec{A}]}{\partial \vec{A}} \\ \vec{j}_s &= -\frac{\hbar^2 \partial}{2m^* \partial \vec{A}} \int \left( -i\hbar\nabla\psi + 2e\vec{A}\psi \right) \left( i\hbar\nabla\psi + 2e\vec{A}\psi \right) d^3\vec{r} \\ \vec{j}_s &= -\frac{\hbar^2 \partial}{2m^* \partial \vec{A}} \int \left( -\hbar^2 \nabla^2 |\psi|^2 + 2\hbar e i \vec{A} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + (2e)^2 \vec{A}^2 |\psi|^2 \right) d^3\vec{r} \\ \vec{j}_s &= -\frac{2\hbar^3 e i (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)}{2m^*} - \frac{(2e)^2 \hbar^2 \vec{A}}{m^*} \end{aligned}$$

O potencial vetor magnético pode ser obtido através do campo magnético produzido por todas as densidades de corrente presentes no sistema. No caso que estamos analisando, trata-se de um solenoide infinito com densidade de corrente  $\vec{j}_{ext}$  e a densidade de corrente na superfície do supercondutor  $\vec{j}_s$ . Logo:

$$\nabla \vec{\mathbb{B}} = \mu_o \left( \vec{j}_{ext} + \vec{j}_s \right) \quad (3.43)$$

### 3.7 Simetria de Gauge e Quebra espontânea de Simetria

É possível descrevermos  $\psi$  como uma função de onda (na verdade já tratamos o parâmetro de ordem desta maneira), desde que a sua fase  $\theta$  não interfira na energia livre total. Assim, é possível escrevermos:

$$\psi = |\psi| e^{i\theta}. \quad (3.44)$$

Tal qual a magnetização assume um valor espontaneamente, os sistema “escolhe” um valor randomicamente para  $\theta$  nos supercondutores.

Ao fazermos uma transformação de gauge [12] no potencial vetor magnético do tipo:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \nabla\chi(\vec{r}) \quad (3.45)$$

Uma mudança natural ocorrerá na fase do parâmetro de ordem, de modo que

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\theta(\vec{r})} \quad (3.46)$$

O operador momento é dado por:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla + 2e\vec{A}. \quad (3.47)$$

Aplicando este operador à função (3.46), temos:

$$\begin{aligned} \hat{p}\psi e^{i\theta} &= \left(-i\hbar + 2e\vec{A}\right) \psi e^{i\theta(\vec{r})} \\ &= -ie^{i\theta(\vec{r})}\nabla\psi + \hbar\psi e^{i\theta(\vec{r})}\nabla\theta(\vec{r}) + 2e\vec{A}\psi e^{i\theta(\vec{r})} \\ &= e^{i\theta(\vec{r})} \left(-i\hbar\nabla + 2e \left(\vec{A} + \frac{\hbar}{2e}\nabla\theta\right)\right) \end{aligned}$$

É possível perceber que, ao fazermos uma alteração no parâmetro de ordem do tipo  $\psi \rightarrow \psi e^{i\theta(\vec{r})}$  o vetor potencial magnético sofre uma alteração do tipo  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{\hbar}{2e}\nabla\theta(\vec{r})$ . O campo elétrico, por exemplo, é obtido através dos potenciais por  $\vec{\mathbb{E}} = -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A}$  e, quando fazemos a alteração no parâmetro de ordem, temos:

$$\vec{\mathbb{E}} = -\nabla\Phi - \partial_t \left(\vec{A} + \frac{\hbar}{2e}\nabla\theta(\vec{r})\right) \quad (3.48)$$

Como  $\theta(\vec{r})$  depende da posição apenas, então o campo elétrico fica inalterado, caracterizando uma invariância local de gauge. Tanto o potencial vetor magnético quanto a fase do parâmetro de ordem dependem do gauge escolhido, no entanto as grandezas observáveis (energia livre, campo magnético e outras) são invariantes de gauge.

No estado fundamental, o parâmetro de ordem é constante, ou seja, é o mesmo para qualquer  $\theta$ . Deve existir, então, uma rigidez de fase, ou seja, uma quantidade de energia associada a  $\theta$  de uma parte do sólido para outra. No entanto, se temos um parâmetro de ordem com módulo constante e dependência espacial em sua fase, então:

$$F_s = F_s^o + \rho_s \int d^3\vec{r} \left( \nabla\theta + \frac{2e}{\hbar} \vec{A} \right)^2, \quad (3.49)$$

com  $\rho_s = \frac{\hbar^2}{2m} |\psi|^2$  e  $F_s^o$  sendo a energia total livre no estado fundamental.

Escolhendo o gauge de London ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ), então há agora uma quantidade de energia livre associada a gradientes em  $\theta(\vec{r})$ . Para minimizar o gradiente de energia, precisamos minimizar os gradientes, fazendo  $\theta(\vec{r})$  ser constante em todo o sistema. No caso de campo nulo, nós temos  $\vec{A} = \vec{0}$  e  $\theta \rightarrow cte$ . Como o sistema escolhe randomicamente a fase do parâmetro de ordem em todo o sistema, então dizemos que o sistema possui uma ordem de longo alcance na fase do parâmetro de ordem. De maneira bem similar, como ocorre no ferromagnetismo, onde o sistema escolhe uma direção privilegiada randomicamente para a magnetização  $\vec{M}$ .

Como a ordem de longo alcance está na fase do parâmetro de ordem (que não é um observável físico na mecânica quântica), dizemos que o sistema tem quebra espontânea de simetria global. A questão está no fato de que a simetria de gauge global se refere à mudança de  $\theta(\vec{r})$  por um valor constante em todo o sólido. Isso está em contraste com a simetria de gauge local, em que  $\vec{A}(\vec{r})$  e  $\theta(\vec{r})$  são alterados simultaneamente.

A densidade de corrente pode ser calculada com a seguinte derivada funcional:

$$\vec{j}_s = -\frac{\partial}{\partial \vec{A}} F_s[\vec{A}(\vec{r})] \quad (3.50)$$

Logo:

$$\vec{j}_s = -2\rho_s \cdot \frac{2e}{\hbar} \left( \nabla\theta + \frac{2e}{\hbar} \vec{A} \right) \quad (3.51)$$

No estado fundamental  $\theta$  é constante e, para um baixo potencial vetor magnético  $\vec{A}$  (constante), temos:

$$\vec{j}_s = -2\rho_s \left( \frac{2e}{\hbar} \right)^2 \vec{A} \quad (3.52)$$

No capítulo anterior, apresentamos a Lei de London que possui a seguinte equação matemática:

$$\vec{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m_e} \vec{A} \quad (3.53)$$

Logo:

$$\vec{j}_s = -2 \frac{4e^2}{2m^*} \vec{A} |\psi|^2 \quad (3.54)$$

Comparando (3.53) e (3.54), temos que  $n_s = 4|\psi|^2$  e  $m^* = 2m_e$ . Deste modo, podemos interpretar  $|\psi|^2$  como a densidade de pares de elétrons no estado fundamental. Com isso, a quantidade  $n_s$  pode ser entendida como a densidade de elétrons pertencentes a estes pares no estado fundamental. O parâmetro  $m^*$  é a massa do par de Cooper, que é, naturalmente, o dobro da massa do elétron (!).

Em termos da energia livre original da teoria de Ginzburg-Landau, ou seja, em termos dos parâmetros  $\dot{a}$  e  $b$ , a densidade  $n_s$  é dada por:

$$n_s = 4|\psi|^2 = 4 \frac{\dot{a}(T_c - T)}{b} \quad (3.55)$$

A profundidade de penetração na amostra fica

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\mu_0 n_s e^2}{m_e} \\ \xi &= \frac{4\mu_0 \dot{a} (T_c - T) e^2}{b m_e} \end{aligned} \quad (3.56)$$



## Capítulo 4

# A eletrodinâmica de Proca

## 4.1 Introdução

Todo o eletromagnetismo clássico está baseado no fato do fóton possuir massa de repouso nula. Esta afirmação é ainda mais forte quando nos espelhamos na natureza, onde tal massa não é observada e, além disso, há uma grande aplicação de uma teoria eletromagnética onde o fóton não possui massa de repouso [11].

A falta de massa para o fóton vem de uma teoria em que os campos elétrico e magnético são obtidos a partir da lei do inverso do quadrado da distância entre o ponto onde se mede o campo e a fonte. Esta lei foi proposta inicialmente por Coulomb e Cavendish, mas foi comprovada por eles com alguns por cento de precisão. Com o passar dos anos, esta lei foi dramaticamente comprovada e até hoje aplicamos seus resultados. Um fóton não massivo está em pleno acordo com as observações, uma vez que utilizamos em larga escala a radiação eletromagnética em ondas de rádio, TV, celulares, microondas, raio-x, espectro visível da luz, entre outras aplicações.

As tentativas de medidas de uma possível massa para o fóton até hoje fizeram com que a teoria chegasse a limites cada vez menores de distâncias, uma vez que a lei do inverso do quadrado “funciona” para todo o limite clássico e parte do limite quântico [14]. Mas isso não quer dizer que não existam fótons massivos, mas que a massa do fóton pode ser ainda menor do que a precisão que os experimentos fornecem. É fato que se existir uma massa para o fóton, todo o eletromagnetismo precisa ser reformulado, uma vez que este está pronto para um fóton não massivo e, inclusive, a invariância de Gauge existe por que a massa do fóton não existe! Se abandonarmos nossos princípios clássicos e a invariância de Gauge, poderemos fazer grandes considerações sobre a possível existência de um fóton massivo [10].

## 4.2 O eletromagnetismo de Proca

As Equações de Maxwell são um grupo de quatro equações, assim chamadas em honra de James Clerk Maxwell, que descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético, bem como suas interações com a matéria [30].

As quatro equações de Maxwell expressam, respectivamente, como cargas elétricas produzem campos elétricos (Lei de Gauss), a ausência experimental de cargas magnéticas, como corrente elétrica produz campo magnético (Lei de Ampère), e como variações de campo magnético produzem campos elétricos (Lei da indução de Faraday). Maxwell, em

1864, foi o primeiro a colocar todas as quatro equações juntas e perceber que era necessária uma correção na lei de Ampère: alterações no campo elétrico atuam como correntes elétricas, produzindo campos magnéticos.

Além disso, Maxwell mostrou que as quatro equações, com sua correção, predizem ondas de campos magnéticos e elétricos oscilantes que viajam através do espaço vazio na velocidade que poderia ser predita de simples experiências elétricas. Usando os dados disponíveis na época, Maxwell obteve a velocidade de  $310.740.000m/s$ .

Maxwell (1865) escreveu:

*Esta velocidade é tão próxima da velocidade da luz que parece que temos fortes motivos para concluir que a luz em si (incluindo calor radiante, e outras radiações do tipo) é uma perturbação eletromagnética na forma de ondas propagadas através do campo eletromagnético de acordo com as leis eletromagnéticas.*

Maxwell estava correto em sua hipótese, embora ele não tenha vivido para ver sua comprovação por Heinrich Hertz em 1888. A explicação quantitativa da luz como onda eletromagnética é considerada um dos grandes triunfos da física do século XIX. Na verdade, Michael Faraday postulou uma descrição similar da luz em 1846, mas não foi capaz de dar uma descrição quantitativa ou prever a velocidade. Além disso, serviu como base para muitos desenvolvimentos futuros na física, tais como a relatividade restrita e sua unificação entre os campos magnético e elétrico como uma única quantidade tensorial e a Teoria de Kaluza-Klein da unificação do eletromagnetismo com a gravidade e a relatividade geral.

As equações de Maxwell [6] são dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbb{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbb{B}} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{B}} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Queremos, no entanto, um conjunto de equações que nos forneça massa para a radiação eletromagnética [28]. Isso pode acontecer se modificamos as referidas equações de Maxwell introduzindo termos com potenciais escalar elétrico e vetor magnético. Essa modificação será feita na primeira e na quarta equação:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbb{E}} + \xi \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbb{B}} = 0 \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{B}} + \xi \vec{A} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t} \quad (4.8)$$

A adição dos potenciais  $\Phi$  e  $\vec{A}$  faz com que esse novo grupo de equações não seja mais invariante [8], ou seja, não há transformações que não alterem mais as intensidades dos campos. A quantidade  $\xi$  é uma constante que terá um grande valor para nossas análises.

Conforme já esperávamos, a solução para os campos elétrico e magnético não são funções com o inverso do quadrado da distância por conta da presença dos potenciais escalar e vetorial.

Apesar de estarmos trabalhando com uma modificação na teoria eletromagnética de Maxwell, as relações entre os campos e os potenciais continuam válidas. Logo:

$$\vec{\mathbb{E}} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.9)$$

$$\vec{\mathbb{B}} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.10)$$

Vamos, agora, derivar a equação (4.5) com relação ao tempo para obtermos:

$$\nabla \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\epsilon_o} - \xi \Phi \right) \quad (4.11)$$

Vamos, também, aplicar o divergente na equação (4.8) para obtermos:

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbb{B}})}_{=0} + \xi \nabla \cdot \vec{A} = \mu_o \nabla \cdot \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \nabla \cdot \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t}$$

Utilizando a relação (4.11) na equação acima, temos:

$$\xi \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu_o \left( \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (4.12)$$

O lado direito da igualdade refere-se à conservação da carga. Sabemos que esta relação  $(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t})$  deve ser nula e, para isso, devemos ter, também, a seguinte relação:

$$\nabla \vec{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (4.13)$$

É possível notar a semelhança entre a equação (4.13) e à condição de Lorentz escolhida para transformação de calibre utilizada por Maxwell. No entanto, o calibre de Lorentz é uma escolha que pode ser adotada, enquanto a equação (4.13) é uma condição que precisa, necessariamente, ser satisfeita para que continuemos a busca por nosso fóton massivo.

Assim como nas equações eletromagnéticas de Maxwell, tentaremos encontrar uma equação de onda com nossas equações corrigidas. Para isso, tomemos as equações (4.5), (4.7), (4.7) e (4.8) no vácuo:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbb{E}} + \xi \Phi = 0 \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbb{B}} = 0 \quad (4.15)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{B}} + \xi \vec{A} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t} \quad (4.17)$$

#### 4.2.1 Equação de onda para os potenciais $\Phi$ e $\vec{A}$

- Utilizando a equação (4.9) na equação (4.14), temos, em termos do potencial  $\Phi$ , a seguinte equação:

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial \nabla \vec{A}}{\partial t} + \xi \Phi = 0$$

Sabemos, ainda, que  $\nabla \vec{A} = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  e que  $\mu_o \epsilon_o = c^{-2}$ . Logo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi + \xi \Phi = 0$$

utilizando, ainda, o operador d'Lambertiano  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ , temos:

$$(\square + \xi) \Phi = 0 \quad (4.18)$$

É interessante observar que esta equação é parecida com a equação de Klein-Gordon para o fóton.

- Para o potencial  $\vec{A}$ , vamos substituir as relações (4.9) e (4.10) na equação (4.17):

$$\nabla \times \nabla \vec{A} + \xi \vec{A} = \frac{1}{c^2} \left( -\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

Mas, sabemos que  $\nabla \times \nabla \vec{A} = \nabla (\nabla \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2 \nabla \vec{A}$ . Logo:

$$(\square + \xi) \vec{A} = 0 \quad (4.19)$$

Verificamos, então, que o potencial  $\vec{A}$  também satisfaz uma equação de onda unidimensional que também é similar à equação de Klein-Gordon para o fóton. Isso nos leva a concluir que o fóton massivo de Maxwell-Proca também se propaga como uma onda.

### 4.2.2 Ondas Planas

No vácuo, os potenciais e os campos podem ser obtidos através da equação de onda dos potenciais. Vamos supor, então, que a solução para cada um deles seja uma onda plana tal que:

$$\Phi = \Phi_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (4.20)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (4.21)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (4.22)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (4.23)$$

Aplicando (4.20) em (4.18), temos:

$$\left( c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \xi \right) \Phi_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} = \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \xi \right) \Phi_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} = 0 \quad (4.24)$$

Como o termo  $\Phi_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}$  é diferente de zero, então  $-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \xi = 0$ , o que nos leva a equação de dispersão:

$$\omega^2 = c^2 \vec{k}^2 + c^2 \xi \quad (4.25)$$

Vamos agora aplicar a relação (4.23) na equação (4.15). Logo:

$$\begin{aligned} \nabla \left( \vec{\mathbb{B}}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \right) &= 0 \\ \vec{\mathbb{B}} \cdot \vec{k} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Isso nos mostra que, tal qual no eletromagnetismo de Maxwell, o campo magnético é perpendicular à direção de propagação da onda. Se fizermos o mesmo raciocínio com a relação (4.22) e a equação (4.14), teremos:

$$\begin{aligned} \nabla \left( \vec{\mathbb{E}}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \right) + \xi \Phi_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} &= 0 \\ \vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{k} &= -\xi \Phi_o \end{aligned} \quad (4.27)$$

Isso significa que o campo elétrico não é perpendicular à direção de propagação da onda, diferindo dos resultados de Maxwell. O fóton massivo faz com que a direção do campo elétrico sofra um pequeno desvio, gerando assim um estado de polarização longitudinal, ao invés de transversais.

Temos também, analogamente a Maxwell, a seguinte relação entre os campos:

$$\hat{k} \times \vec{\mathbb{E}}_o = c \vec{\mathbb{B}}_o \quad (4.28)$$

Aqui temos uma relação parecida com a de Maxwell, onde o campo elétrico e o campo magnético são perpendiculares entre si.

Quando analisamos o fóton massivo, percebe-se a presença de três estados de polarização: dois transversais e um longitudinal. Esse estado longitudinal é decorrente da massa do fóton e diminui à medida que fazemos o limite da massa do fóton tendendo a zero, restando uma teoria com um fóton não-massivo e dois estados de polarização transversais, conforme Maxwell.

### 4.3 O Parâmetro $\xi$

Quando modificamos as equações de Maxwell, introduzimos um parâmetro  $\xi$  juntamente com os potenciais escalar e vetorial. A interpretação física deste parâmetro pode

ser feita a partir da equação de dispersão (4.25). Para isso, multiplicaremos os dois lados da igualdade pelo termo  $\hbar^2$ , que é a constante de Planck. Logo:

$$\begin{aligned}\hbar^2\omega^2 &= \hbar^2\vec{k}^2c^2 + \hbar^2\xi^2c^2 \\ \hbar\omega &= \sqrt{\hbar^2\vec{k}^2c^2 + \hbar^2\xi^2c^2}\end{aligned}$$

Utilizando conceitos da mecânica quântica, temos que  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  e  $E = \hbar\omega$ . Logo:

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + \hbar^2\xi^2c^2}$$

Esta equação é exatamente a equação de energia se tivermos  $\xi = \frac{m_\gamma c^2}{\hbar^2}$ , onde  $m_\gamma$  é a massa do fóton. É fácil perceber que o parâmetro  $\xi$  está associado ao comprimento de onda de Compton para o fóton. Este é dado por  $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_\gamma c}$ , então:

$$\xi = (\lambda_c)^{-2}, \quad (4.29)$$

ou seja:

$$\xi = \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \quad (4.30)$$

Ao analisarmos a equação (4.25) podemos fazer algumas considerações interessantes com relação à velocidade de propagação da onda eletromagnética massiva. Imaginemos a princípio que a onda viaja com fase constante, ou seja,  $kz - \omega t = cte$ . Derivando os dois lados com relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\omega}{k} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\sqrt{c^2k^2 + c^2\xi}}{k} \\ \frac{dz}{dt} &= c\sqrt{1 + \frac{\xi\lambda^2}{4\pi^2}}\end{aligned} \quad (4.31)$$

onde as relações (4.25) e  $k = 2\pi/\lambda$  foram utilizadas. Como  $\xi = (\lambda_c)^{-2}$  e  $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_\gamma c}$ , temos:

$$\frac{dz}{dt} = c\sqrt{1 + \frac{m_\gamma c^2}{\hbar^2}} \quad (4.32)$$



Note que se a velocidade de propagação da onda eletromagnética é um parâmetro mensurável, então podemos utilizá-la para uma estimativa para a massa do fóton. Logo, fazendo  $v = dz/dt$ :

$$m_\gamma = \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{c^2} \quad (4.33)$$

É possível, então, percebermos que a velocidade de fótons massivos não é mais a velocidade da luz, mas sim uma velocidade dependente de sua própria massa de repouso.

#### 4.4 Análise da quarta equação de Proca

Na seção 4.2, nós reescrevemos as equações de Maxwell com a inserção dos potenciais elétrico  $\Phi$  e vetor magnético  $\vec{A}$ . Com isso, a equação (4.8) possui o potencial vetor magnético e é dada por:

$$\nabla \times \vec{\mathbb{B}} + \xi \vec{A} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t}.$$

Sabemos, no entanto, que o potencial vetor magnético é descrito de modo que  $\vec{\mathbb{B}} = \nabla \times \vec{A}$ . Com isso, a equação (4.8) fica:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} + \xi \vec{A} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbb{E}}}{\partial t}. \quad (4.34)$$

Se estamos num espaço desprovido de campo elétrico e de correntes, e utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} - \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A}$  no primeiro termo do lado esquerdo, então:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \underbrace{\nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A}}_{\nabla \cdot \vec{A} = 0} = -\xi \vec{A}. \quad (4.35)$$

Finalmente:

$$\nabla^2 \vec{A} = \xi \vec{A}. \quad (4.36)$$

A equação (4.36) nos mostra, então, que podemos escrever uma relação entre uma operação com o potencial vetor magnético e o parâmetro  $\xi$ , que de acordo com a seção 4.3,

carrega a informação de massa da radiação através da equação (4.30). Matematicamente, podemos reescrever (4.36) combinada com (4.30) para obtermos:

$$\nabla^2 \vec{A} = \left( \frac{m_\gamma c}{\hbar} \right)^2 \vec{A}. \quad (4.37)$$

## Capítulo 5

# Unindo o Fim e o Começo

## 5.1 Comparação do parâmetro $\xi$ das equações de Proca e da teoria de London

Na teoria de London, descrita na seção 2.6.1, associamos o parâmetro  $\xi$  com o campo magnético através da equação (2.26). Escrevendo esta equação em termos do potencial vetor magnético, teremos:

$$\nabla \times \nabla \times \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\vec{\mathbb{B}}} = -\xi \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\vec{\mathbb{B}}} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\xi \vec{A} \quad (5.2)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \underbrace{\nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A}}_{\nabla \cdot \vec{A}=0} = -\xi \vec{A} \quad (5.3)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\xi \vec{A} \quad (5.4)$$

O parâmetro  $\xi$  é entendido como o comprimento de penetração do campo magnético na amostra e é dado por:

$$\xi = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m_e} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.5)$$

Quando modificamos as equações de Maxwell, nós também obtivemos um potencial vetor magnético com a mesma forma de (5.4). No entanto, aqui o parâmetro  $\xi$  é o parâmetro que carrega a informação da massa da radiação.

através de uma comparação direta do parâmetro  $\xi$  das duas ideias citadas, teremos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \\ m_\gamma &= \frac{\hbar}{\lambda c} \end{aligned} \quad (5.6)$$

A quantidade  $m_\gamma = \frac{\hbar}{\lambda c}$  tem a mesma forma do comprimento Compton e já é conhecida na literatura em alguns sistemas onde há a geração de massa [13]. Para alguns valores típicos de comprimento de penetração já conhecidos na natureza, temos a tabela abaixo com os respectivos valores possíveis para fótons massivos.

| Elemento | $T_c(K)$ | $B_c(T)$ | $\lambda(nm)$ | $m_\gamma(\times 10^{-35}kg)$ |
|----------|----------|----------|---------------|-------------------------------|
| Al       | 1,175    | 0,010    | 50            | 4,4                           |
| Sn       | 3,721    | 0,030    | 51            | 4,31                          |
| In       | 3,405    | 0,028    | 64            | 3,44                          |
| Pb       | 7,19     | 0,080    | 39            | 5,64                          |

Comparando a expressão 5.6 com o supercondutor (Hg,Re)-1223 ([26]), produzido pelo Grupo de Física Aplicada da Ufes ([18], [24], [23], [25] e [22]), que possui um comprimento de penetração de  $129\text{ nm}$ , encontramos uma massa de  $1,7 \times 10^{-34}\text{ kg}$ .

## 5.2 Considerações finais e trabalhos futuros

O estado supercondutor em materiais metálicos é dotado de significativos itens interessantes. O objeto de nosso estudo no presente trabalho foi a penetração do potencial vetor magnético no interior de uma amostra supercondutora. Pudemos associar essa penetração, através do comprimento de penetração de London ( $\xi = \lambda^{-2}$ ) a uma possível massa de repouso para o fóton através de uma modificação nas equações de Maxwell.

O estudo termodinâmico da transição de fase, do estado normal para o estado supercondutor, através da teoria de Ginzburg-Landau, nos permitiu um entendimento mais a fundo da fenomenologia que está por trás desta passagem. Pudemos recobrar elementos da teoria de London através do estudo de flutuações termodinâmicas na transição para a fase supercondutora.

Alguns trabalhos futuros podem decorrer de iniciativas presentes nesta obra. Entre eles, temos:

- o modo como um fóton massivo modificaria as ideias da óptica, uma vez que temos uma componente do campo elétrico na direção de propagação da radiação eletromagnética;
- um estudo mais profundo da associação de um fóton massivo dentro da teoria de Ginzburg-Landau;
- a investigação de resultados que poderíamos obter estudando o efeito de fótons massivos em outras teorias, como, por exemplo, no efeito Casimir e em barreiras de potencial.

A massa que obtivemos, através de nossas considerações, para o fóton considerando alguns materiais, fica sempre na ordem de  $10^{-35} \text{ kg}$ . Nessa ordem de grandeza, temos uma massa 10.000 vezes menor do que a do elétron. Esse valor se torna irrisório do ponto de vista de nossa limitação em medidas, mas não exclui formalmente a possibilidade de não existirem fótons massivos, mas sim de não detectarmos em nosso mundo cotidiano.

# Referências Bibliográficas

- [1] Annett, J. F.; Superconductivity, Superfluids and Condensates. (2003)
- [2] Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R.: Phys. Rev. **108** (1957) 1175.
- [3] Callen, W.; Thermodynamics and Introduction to Thermostatistics.
- [4] Passos, C. A. C.: Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física. (2007)
- [5] Charbonneau, J.; Introduction to the Ginzburg-Landau Equations. (2005)
- [6] Machado, K. D. Teoria do Eletromagnetismo volumes 1, 2 e 3, Ponta Grossa, UEPG, 2000.
- [7] Davies, P. C. W.; Toms, D. J. Boundary Effects and the Massless limit of the Photon. Physical Review D, 1985
- [8] Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1964.
- [9] Ginzburg, V. L., Landau, L. D.: Zh. Eksper. Teor. Fiz. 20(1950) 10641
- [10] Goldhaber, A., S.; Nieto, M., M.; Photon and Graviton Mass Limits. (2010)
- [11] Gonçalves, E., S.; A Massa do Fóton e a Eletrodinâmica de Proca. (2008)
- [12] Greiner, W., Reinhardt, J.; Field Quantization; (1986)
- [13] Greiner, W., Müller, Berndt Gauge Theory of Weak Interactions, 3<sup>a</sup> Edition, 1986
- [14] Herdy, W. M.; A Eletrodinâmica de Maxwell-Proca e o Fóton Massivo; (2010)
- [15] Kitazawa, K.: Superconductivity: 100th Anniversary of Its Discovery and Its Future, Japanese Journal of Applied Physics **51** (2012) 010001

- [16] KITTEL, C., Quantum theory of solids. 2ed. New York: Wiley, 1987, p.150-178.
- [17] London, F., London, H. The electromagnetic equations of the superconductor. Proc. Roy. Soc., v. A141, p. 71-88, Mar. 1935.
- [18] ORLANDO, M. T. D. et al. Effects of re-doping on superconducting properties and formation of Hg-1223 superconductor. Physica C, v. 328, p. 257-269, Dec. 1999.
- [19] Meissner, W., Ochsenfeld, R. Naturwissenschaften **21** (1933) 787
- [20] Onnes, H. K. *Commun. Phys. Lab. Leiden 140c (1914); reprint ed in Proc. K. Ned. Akad. van Wetenschappen (Amsterdam) 17(1914) 278.*
- [21] Ostermann, F., Ferreira, L. M., Cavalcanti, C. J. H.: Tópicos de Física Contemporânea no Ensino Médio: um Texto para professores sobre Supercondutividade, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 20, n° 3 (1998).
- [22] Passos, C A C ; Orlando, Marcos Tadeu D'azeredo ; Oliveira, F. D. C. ; CRUZ, P C M ; Passamai Jr, J L ; Orlando, Cintia Garrido Pinheiros ; Elói, N A ; Correa, H P S ; Martinez, Luiz Gallego . Effects of oxygen content on the properties of the HgReBaCaCuO. Superconductor Science and Technology, v. 15, p. 1177-1183, 2002.
- [23] Passos, Carlos Augusto C ; Orlando, Marcos Tade D'azerredo ; Oliveira, F. D. C. ; Passamai Junior, José Luiz ; Medeiros, E. F. ; Fardin, Jussara Farias ; Simonetti, Domingos S L . Superconducting fault current limiter device based on (Hg,Re)-1223 superconductor. Applied Physics Letters, v. 89, n. 24, p. 1-3, 2006.
- [24] PASSOS, Carlos Augusto C ; PASSAMAI Jr, J L ; ORLANDO, Marcos Tadeu D'azeredo ; MEDEIROS, Edna de ; SAMPAIO, Ray Vianna ; OLIVEIRA, F. D. C. ; FARDIN, Jussara Farias ; SIMONETTI, Domingos S L . Application of the (Hg,Re)-1223 ceramic on superconducting fault current limiter. Physica. C, Superconductivity, v. 460-2, p. 1451-1452, 2007.
- [25] Oliveira, F. D. C. ; Passos, Carlos Augusto C ; Fardin, Jussara F ; Simonetti, Domingos S L ; Passamai Junior, José Luiz ; H. Belich ; Medeiros, E. F. ; Orlando, Marcos Tadeu D'azeredo ; Ferreira JR, M M . The Influence of Oxygen Partial Pressure on Growth of the (Hg,Re)-1223 Intergrain Junction. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, v. 16, p. 15-20, 2006.



- [26] PASSOS, Carlos Augusto C ; ORLANDO, Marcos Tadeu D'azeredo ; OLIVEIRA, F. D. C. ; SIMONETTI, Domingos S L ; FARDIN, Jussara F ; FERREIRA JR, M M .: Effects of oxygen content on the pinning energy and critical current in the granular (Hg,Re)-1223 superconductors, PhysicaC, v.419,p.25-31, Feb. 2005
- [27] Pole, C.; Superconductivity. (1995)
- [28] Ryder, L. H.; Quantum Field Theory. (1985)
- [29] Schmidt, V. V.; The Physics of Superconductors. (1997)
- [30] Tajmar, M.; Electrodynamics in Superconductors Explained by Proca Equations, Physics Letters A 372 (18) p. 3289-3291 .