

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**JOSÉ GUILHERME PELIÇÃO PANCIERI**

**ANÁLISE DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMA BI-  
LINEAR COM FOLGA SIMÉTRICA**

**VITÓRIA - ES  
2012**

**JOSÉ GUILHERME PELIÇÃO PANCIERI**

**ANÁLISE DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS  
BI-LINEAR COM FOLGA SIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Coelho de Mattos

**VITÓRIA – ES**

**2012**

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

P188a Pancieri, José Guilherme Pelicão, 1971-  
Análise de movimentos periódicos em sistema bi-linear com  
folga simétrica / José Guilherme Pelicão Pancieri. – 2012.  
81 f. : il.

Orientador: Márcio Coelho de Mattos.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Oscilações não-lineares. 2. Estabilidade. 3. Movimento. 4.  
Periódicos. I. Mattos, Márcio Coelho de. II. Universidade Federal  
do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

---

**JOSÉ GUILHERME PELIÇÃO PANCIERI**

**ANÁLISE DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS  
BI-LINEAR COM FOLGA SIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

**Prof. Dr. Márcio Coelho de Mattos - Orientador**  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

**Prof. Dr. José Manoel Balthazar**  
Universidade Estadual Paulista

---

**Prof. Dr. Angelo Gil Pezzino Rangel**  
Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória (ES), 27 de Março de 2012.

Aos meus filhos, Ana Clara e Luis Guilherme,  
minha esposa, Cynthia e  
aos meus pais, Cândia e Jerônimo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, onde eu encontro, nas minhas orações, as forças necessárias para enfrentar os desafios na minha caminhada.

Aos meus pais, Cândida e Jerônimo, que me ensinaram os valores voltados para família, à verdade e à justiça, o apoio em toda a minha vida, desde quando eu me decidi sair de casa para estudar, mas que sempre me alertavam: “**..., não deixe nunca a máquina decidir sobre o correto e o justo,...**”.

À minha esposa e aos meus filhos, pela compreensão da ausência nos momentos da necessária dedicação aos estudos e pesquisas, pelo incentivo incondicional à conclusão do Mestrado e a percepção de que era um grande objetivo pessoal.

Ao Prof. Márcio Coelho de Mattos, pela aceitação como orientado, dedicação de seu tempo e no entusiasmo pela linha de pesquisa adotada.

Aos professores Cherlio Scandian e Marcelo Camargo Severo de Macedo, pela confiança em acreditar que, mesmo sendo um aluno com extensas atividades externas profissionais, me aceitaram no Programa de Pós-Graduação.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica, em especial ao professor Carlos Friederich Loeffler Neto, pelas orientações e conselhos.

Aos professores membros da banca examinadora, pela atenção, disponibilidade e orientações.

Aos colegas de mestrado, pelos momentos de apoio mútuo, em especial ao amigo Leandro Valoto, pela presença e horas de estudo em grupo.

Aos meus gerentes na VALE, Julio Lana, Hiran Bezerra e Luíz Paulo Rangel, pelo apoio necessário e tempo de ausência ao trabalho.

A todos que, de alguma forma, me incentivaram, direta ou indiretamente, à finalização do Mestrado, com apoio e alegria na conclusão de mais um grande triunfo em minha vida pessoal.

*“A conclusão de um Mestrado não significa maior conhecimento em alguma área específica de estudo, mas a necessidade de compartilhar mais e dividir esse conhecimento.”*

(autor desconhecido)

## RESUMO

O presente trabalho apresenta a modelagem matemática de um sistema vibracional com excitação harmônica da base. Esse tipo de sistema tem sido estudado por vários pesquisadores que exploraram muitos aspectos da dinâmica global. No entanto, na grande parte dos sistemas estudados, o sistema era modelado para uma característica de vibro-impacto. No sistema aqui estudado, os impactos são substituídos por outro conjunto visco-elástico e os instantes de transição são considerados como condição de periodicidade. As condições de periodicidade são aplicadas sobre o estado nos instantes de transição a fim de obter um mapa da próxima transição baseada no estado da anterior. Este mapa não-linear é aplicado para obter as condições de existência dos movimentos periódicos com padrões específicos. Assim, aplicando as condições de existência, a estabilidade do movimento pode ser realizada por meio da análise dos autovalores do mapa linearizado, tendo em conta estas restrições.

Palavras-chave: oscilações não-lineares, transição, movimentos periódicos, estabilidade.



## **ABSTRACT**

This work presents the mathematical modeling of a vibrational system with the harmonically excited base. The system has been investigated by several researchers exploring many aspects of the global dynamics. However, in most of the systems studied, the systems were modeled for a vibro-impact feature. In this system, the impacts are replaced by another visco-elastic set and the moment of transition is considered as a condition of periodicity. Periodicity conditions are applied on the state at the moment of transition in order to obtain a map of the next transition based on the state of the previous one. This nonlinear map is used to obtain the conditions of existence of periodic motions with specific patterns. Applying the existence conditions, the stability of the motion can be achieved by analyzing the eigenvalues of the linearized map while taking these conditions into account.

Keywords: nonlinear oscillations, transition, periodic motions, stability.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1:</b> Sistema com mola, amortecedor e oscilação da base. ....	16
<b>Figura 2.1:</b> Sistema com mola, amortecedor e oscilação da base. ....	30
<b>Figura 2.2:</b> Movimento 1-6, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,5$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 10$ .....	42
<b>Figura 2.3:</b> Movimento 2-10, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,4$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 10$ .....	42
<b>Figura 2.4:</b> Movimento 1-6, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,3$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 10$ .....	43
<b>Figura 2.5:</b> Movimento 1-8, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,2$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 10$ .....	43
<b>Figura 2.6:</b> Movimento não-periódico, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,1$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 10$ ..	43
<b>Figura 2.7:</b> Movimento quase-periódico, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,5$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 100$ .....	44
<b>Figura 2.8:</b> Movimento 1-8, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,3$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 100$ .....	44
<b>Figura 2.9:</b> Movimento não-periódico, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,2$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 100$ ..	44
<b>Figura 2.10:</b> Movimento 1-12, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,1$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 100$ .....	45
<b>Figura 2.11:</b> Movimento 1-6, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,1$ ; $r_c = 10$ ; $r_k = 10$ .....	45
<b>Figura 2.12:</b> Movimento 1-6, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,01$ ; $r_c = 1$ ; $r_k = 100$ .....	45
<b>Figura 2.13:</b> Movimento 1-4, com $\xi = 0,05$ ; $\omega = 1$ ; $\varepsilon = 0,5$ ; $r_c = 0$ ; $r_k = 1$ .....	46
<b>Figura 2.14:</b> Padrão de movimento com $x_{i+2} = -x_i$ .....	50
<b>Figura 2.15:</b> Padrão de movimento com $x_{i+2} = x_i$ .....	50
<b>Figura 3.1:</b> Amplitude Máxima do sistema linear para $\xi = 0,05$ .....	59
<b>Figura 3.2:</b> Termo $t_1$ e $t_2$ com variação de $\omega$ .....	62
<b>Figura 3.3:</b> Variação de $\eta_{cr}$ em função de $\omega$ .....	62
<b>Figura 4.1:</b> Padrão de movimento 1-4 com $x_{i+4} = +x_i$ .....	63
<b>Figura 4.2:</b> Semi-Período com $x_{i+2} = -x_i$ .....	63
<b>Figura 4.3:</b> Semi-Período com $x_{i+2} = -x_i$ .....	67
<b>Figura 4.4:</b> Modelo proposto por Shaw e Holmes [Shaw-1983]. ....	69
<b>Figura 4.5:</b> Semi-Período com $x_{i+2} = -x_i$ .....	72
<b>Figura 4.6:</b> Semi-Período com $x_{i+2} = -x_i$ .....	72
<b>Figura 5.1:</b> Fluxograma proposto. ....	77

## LISTA DE TABELAS

**Tabela 1** - Padrão dos movimentos com a imposição das condições de existência. 60

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $a_{ij}$  : Termos da matriz  $A$  ;
- $c$  : Coeficiente de amortecimento;
- $d_{ij}$  : Termos da matriz  $D$ ,  $i, j : 1, 2$  ;
- $f_i$  : Vetor de fase entre a resposta e a excitação;
- $i_0$  : Número de transições a partir do qual o estado estacionário é alcançado;
- $k$  : Constante elástica da mola;
- $m$  : Massa do corpo;
- $n$  : Número de transições que ocorrem dentro do período da resposta;
- $p$  : Frequência de oscilação da base;
- $r_c$  : Razão entre o coeficiente de amortecimento do 1º e 2º conjunto de amortecedor;
- $r_k$  : Razão entre a constante elástica do 1º e 2º conjunto de molas;
- $r$  : Razão de distribuição entre os instantes de transição pelo período da resposta;
- $s$  : Deslocamento da base;
- $s_0$  : Amplitude de oscilação da base;
- $t$  : Tempo dimensional;
- $v_0$  : Condição inicial de velocidade;
- $x$  : Deslocamento adimensional;
- $x_0$  : Condição inicial de deslocamento;
- $\dot{x}$  : Velocidade adimensional;
- $\ddot{x}$  : Aceleração adimensional;
- $x$  : Vetor de estado;
- $y$  : Deslocamento relativo entre o corpo e a base oscilante;
- $y_0$  : Valor utilizado para adimensionalização de  $y$  ;
- $z$  : Deslocamento do corpo;
- $A$  : Amplitude de resposta permanente do sistema linear associado;
- $T$  : Período da resposta -  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$  ;

## Lista de Símbolos (Continuação)

- $A$  : Matriz dinâmica do sistema;
- $B$  : Matriz modificada do sistema;
- $\tilde{B}$  : Matriz da resposta do sistema;
- $C_m$  : Matriz que relaciona as condições de fase entre os instantes de transições pela fração de período transcorrida;
- $D$  : Matriz de estabilidade;
- $I$  : Matriz Identidade;
- $M_i$  : Matriz de ajuste para o 2º conjunto mola / amortecedor;
- $R_i$  : Matriz que adiciona o 2º conjunto mola / amortecedor;
- $P$  : Termo de produtos da matriz  $T$  ;
- $Q$  : Termo de produtos da matriz  $T$  ;
- $R$  : Termo de produtos da matriz  $T$  ;
- $S$  : Termo de produtos da matriz  $T$  ;
- $T$  : Matriz obtida do mapa para as condições de transição num movimento periódico;

## Símbolos Gregos

- $\Delta$  : Folga absoluta;
- $\alpha$  : Termo da solução para a fase;
- $\beta$  : Termo da solução para a fase;
- $\varepsilon$  : Folga relativa adimensional;
- $\varphi$  : Ângulo de fase entre a excitação e a resposta;
- $\eta$  : Termo da solução para a fase;
- $\eta_{cr}$  : Função crítica de  $\eta$  ;
- $\lambda_i$  : Autovalores da matriz de estabilidade;
- $\lambda_a, \lambda_b$  : Autovalores do sistema linear associado;

## **Símbolos Gregos (Continuação)**

$\tau$  : Tempo adimensional;

$\tau_i$  : Tempo adimensional da  $i$ -ésima transição;

$\omega_0$  : Frequência natural de oscilação do sistema;

$\omega$  : Frequência natural de oscilação do sistema;

$\pi$  : 3,1415...;

$\xi$  : Fator de amortecimento;

$\gamma$  : Termo adicional em  $\varepsilon$  e  $\nu$  em função do 2º conjunto visco-elástico;

$\Omega_c$  : Razão entre o coeficiente de amortecimento do 1º e 2º conjunto de amortecedor;

$\Omega_k$  : Razão entre a constante elástica do 1º e 2º conjunto de molas;

## **Subscritos e Sobrescritos**

$i$  : Relativa a  $i$ -ésima transição;

$n$  : Número de transição dentro do período da resposta;

$\wedge$  : Relativo ao fim do processo de transição, condição de início do movimento;

$\sim$  : Notação para abreviação de expressões;

$\tilde{\sim}$  : Notação para abreviação de expressões;

# SUMÁRIO

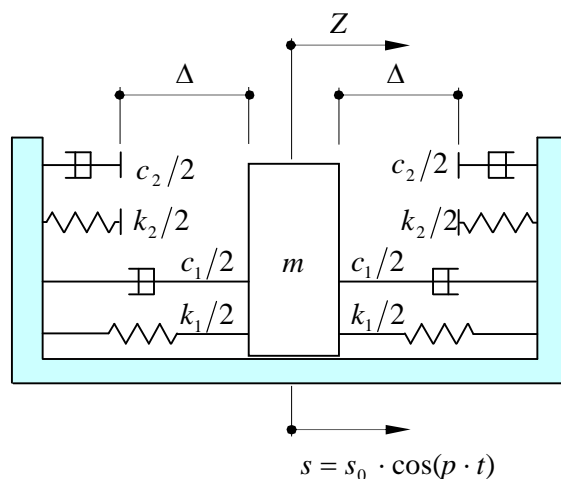
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA .....	16
1.2 COMENTÁRIOS SOBRE SISTEMA COM VIBRO-IMPACTO .....	18
1.3 POSICIONAMENTO DO TRABALHO NA LITERATURA .....	23
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	24
1.5 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO .....	26
1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	28
<b>2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA.....</b>	<b>30</b>
2.1 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO.....	30
2.2 MAPA ENVOLVENDO OS ESTADOS NOS INSTANTES DE TRANSIÇÃO ....	37
2.3 INDEXAÇÃO DE TOPOLOGIAS DE MOVIMENTOS EM RESPOSTA ESTACIONÁRIA .....	41
2.4 EXISTÊNCIA DE MOVIMENTO PERIÓDICO 1-4 SIMÉTRICO.....	46
<b>3. MAPA DE MOVIMENTO PERIÓDICO .....</b>	<b>52</b>
3.1 CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS 1-4 SIMÉTRICOS.....	52
3.2 REGIÃO DE EXISTÊNCIA DE TRANSIÇÕES NO MOVIMENTO LINEAR .....	58
3.3 REGIÃO DE EXISTÊNCIA DE MOVIMENTO SIMÉTRICO 1-4.....	61
<b>4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE .....</b>	<b>63</b>
4.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA MOVIMENTO 1-4 SIMÉTRICO .....	63
4.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA MOVIMENTO 1-4 SIMÉTRICO ESCOLHIDO .....	67
4.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM MOVIMENTO SEGUNDO SHAW E HOLMES [SHAW–1983] .....	69
4.4 ALTERNATIVA GENERALIZADA PARA AVALIAÇÃO DE ESTABILIDADE DO MOVIMENTO 1-4.....	71
<b>5. CONCLUSÃO .....</b>	<b>76</b>
5.1 CONCLUSÕES.....	76
5.2 SUGESTÕES DE TRABALHO FUTURO.....	77
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>79</b>

# 1. INTRODUÇÃO

O capítulo tem como objetivo apresentar o problema do sistema em estudo nesta dissertação. Uma revisão bibliográfica para dimensionar os vários estudos sobre o tema, os objetivos e a organização do trabalho.

## 1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O modelo do sistema estudado consiste de um bloco que se movimenta entre um conjunto visco-elástico, esse conjunto visco-elástico está conectado a uma base oscilante. O modelo físico que representa o sistema é encontrado na Figura 1.1.



**Figura 1.1:** Sistema com mola, amortecedor e oscilação da base.

É possível dar atenção a vários pontos possíveis para o estudo do sistema. Podemos citar:

- o comportamento dinâmico global, com a resposta da oscilação em relação aos parâmetros informados, objetivo maior a ser seguido neste trabalho;
- os efeitos do desgaste por atrito das partes que se interagem e



- as características das ondas sonoras provocadas pelos impactos no segundo conjunto de molas e amortecedores.

No que relaciona aos aspectos da dinâmica global, pode-se enfatizar as condições de existência e estabilidade de movimentos periódicos, as condições de transição para o caos, o controle de sistemas caóticos, as considerações de diversos modelos para o impacto e a dissipação de energia no impacto.

Limitado ao estudo da dinâmica global do sistema, o presente trabalho procura explorar características que facilitem a sua compreensão a partir do mapeamento do estado nos instantes de transição, levando-se em conta as transições anteriores e abordando aspectos da existência e da estabilidade de movimentos de certas topologias. Não se farão análises detalhadas com mapas de Poincaré, nem tampouco com diagramas de bifurcação. O objetivo maior é apresentar uma estratégia de mapeamento que:

- auxilie na definição das condições iniciais da simulação numérica do sistema a fim de poupar esforço computacional até atingir o estado estacionário, se ele existir; e
- contenha certa sistematização, a qual facilite a geração de procedimentos de análise das diversas topologias de movimento possíveis.

Barbosa [Barbosa-200] estudou este mesmo um sistema semelhante, mas não analisou os dois aspectos acima mencionados, tendo dado maior enfoque a observações sobre os movimentos do sistema a partir, principalmente, das simulações numéricas.

É necessário descrever algumas características do modelo. De forma geral:

- despreza-se o atrito seco na superfície do movimento;
- considera-se que a mola e o amortecedor viscoso possuem comportamento linear;

- o sistema realiza impacto unidirecional, ou seja, o sistema move-se somente na direção horizontal e o impacto entre o corpo e o batente rígido acoplado à base será sempre frontal; e
- impõe-se o movimento oscilatório na base, de forma que as colisões e o próprio movimento do bloco não induzem qualquer perturbação. Em outras palavras, considera-se que a energia mecânica é suficientemente robusta, compensando todas as perturbações externas e a do movimento do próprio bloco, para garantir a oscilação prescrita da base.

## 1.2 COMENTÁRIOS SOBRE SISTEMA COM VIBRO-IMPACTO

Sistemas em que impactos ocorrem repetidamente devido a vibrações são costumeiramente denominados sistemas com vibro-impacto.

Na Engenharia podemos encontrar diferentes tipos de sistemas vibracionais. É o caso, por exemplo, de martelos vibratórios, amortecedores de impacto e amortecedores por impacto, excitadores eletromecânicos (*inertial shakers*), bate-estacas, moinhos e máquinas conformadoras [Luo-2008].

Os impactos vibratórios podem ser indesejáveis, como, por exemplo, em máquinas com folgas, em engrenagens, em rodeiros de transporte ferroviário, em trocadores de calor, nos quais a vibração é induzida pelo fluxo nos tubos. Citam-se, também, sistemas de tubulações e assim por diante, pois provocam falhas, desgaste, *pitting*, *scoring*, fadiga superficial, aumento dos níveis de ruído e diminuição da vida útil.

Nesses casos, a investigação sobre a dinâmica do vibro-impacto tem um significado importante na supressão de ruído, na análise de confiabilidade e na otimização do projeto de máquinas com folgas ou obstáculos rígidos. Por isso é necessário conhecer a dinâmica do sistema em cada caso para que se possa tentar atenuar os efeitos do impacto [Kovaleva-2004][Mattos-1998][Luo-2008].

Vale indicar que as fontes de vibro-impacto podem ser as forças provenientes de desbalanceamento em eixos, de interação entre engrenagens, de explosões em motores de combustão interna, ou ainda, pelo fluxo induzido em tubos, como já mencionado [Mattos-1998][Luo-2008].

Para que se permita o uso contínuo do componente após a transição, é necessário que o impacto da transição não cause deformação permanente, ou seja, a tensão deve permanecer na região elástica [Norton-2007]. Uma forte suposição no estudo de sistema com impacto é a de que os corpos são rígidos e que, portanto, não existem deformações destes corpos durante a colisão no momento da transição, ou estas podem ser desprezadas sem problemas para a resposta que se vai obter. No entanto, a ocorrência de deformações nos corpos sob impacto não viola a ideia de corpos rígidos. Os corpos são rígidos quando o único movimento importante antes e depois da colisão no momento da transição é o movimento de corpo rígido [Chatterjee-1997].

Define-se um modelo como a representação de algumas das características do sistema, mas não todas. A utilização de um modelo depende do contexto de cada problema e, ainda, o objetivo de se desenvolvê-lo determina quais características do sistema devem ser reproduzidas de forma aproximada, pois modelos com propriedades bastante diferentes podem ser desenvolvidos [Aguirre-2000]. Assim, muitas vezes modelos simples para a colisão / transição são aplicados na análise de sistemas e resultados aceitáveis são obtidos.

Assim, os elementos que se quiser utilizar na análise do sistema de vibro-impacto deverão ser levados em conta na modelagem. Vários exemplos podem ser aplicados, como:

- se as forças de atrito na superfície de contato são consideradas, é necessário que o modelo as leve em conta. E este modelo pode não depender apenas das propriedades dos materiais dos corpos, mas também do estado de movimento. Para muitos impactos bi ou tridimensionais, a força de atrito não poderá ser desconsiderada, pois nesses tipos de impacto raramente as componentes de

forças paralelas à superfície de contato serão nulas porque raramente a normal àquela superfície passará pelo centro de massa dos corpos em colisão;

- se as deformações são levadas em conta, podem ser consideradas numa relação linear ou não linear, com as forças que atuam na região de contato. Essa consideração depende, não apenas das propriedades dos materiais dos corpos em colisão, como, também, da sua geometria;
- quando a preocupação do estudo recai sobre as tensões que se desenvolvem na região de contato durante o impacto, a modelagem dessas forças e a definição do que seja a região de contato (este depende de vários fatores, tais como a rigidez dos corpos em colisão e geometria destes corpos, além da própria intensidade das forças envolvidas no impacto) crescem de importância [Mattos-1998].

Quando o corpo atinge os batentes da mola-amortecedor do segundo conjunto, inicia-se um processo de colisão na transição que deve ser adequadamente modelado. É considerado aqui o modelo de colisão na transição convencional, a saber:

- curta duração do evento. O lapso da colisão no momento da transição será considerado nulo. Isto é uma idealização do ponto de vista de que haverá conversão de energia, entre cinética e potencial, bem como dissipação num intervalo de tempo zero.

O sistema analisado na dissertação é linear por intervalos. O movimento entre os batentes e antes que o processo de colisão ocorra é analisado como um sistema linear (lembre-se que o acoplamento visco-elástico também é linear). No entanto, o impacto entre o corpo e a base vincula ao modelo matemático uma descontinuidade no movimento, tornando o sistema não-suave. Com isso, embora o sistema seja linear em intervalos de sua resposta, ele é não linear em sua dinâmica global. É bom lembrar que sistemas não-lineares não satisfazem ao princípio da superposição e da proporcionalidade.

Popp [Popp-1998] apresenta uma visão geral, do ponto de vista da aplicação, dos sistemas dinâmicos não-suaves e ressalta os desafios que estes tipos de sistemas são para engenheiros e matemáticos. Um sistema não suave é identificado pelas características da força e/ou do movimento, as quais não são contínuas, ou diferenciáveis. Seguem exemplos:

- i) tratando-se as características de forças não suaves, tem-se os elementos que normalmente se acoplam a massas ou outros elementos para formar um sistema dinâmico, como:
  - duas molas lineares com reação, também chamada de rigidez antissimétrica (*backlash*);
  - molas lineares com pré-carga; e
  - elementos deslizantes com atrito seco, ou atrito Coulomb;
- ii) tratando-se as características de movimentos, exemplifica-se:
  - o impacto de duas massas; e
  - o impacto de uma massa com uma parede rígida.

Popp [Popp-1998] mostra alguns problemas de impacto e de atrito seco, juntamente com os correspondentes modelos mecânicos. Traz, ainda, uma revisão de trabalhos com problemas envolvendo sistemas não-suaves anteriores àquela época. Entre os problemas relacionados ao impacto citam-se:

- o do bloco em balanço (*rocking block*) com ou sem excitação de base, a datar de 1956, com Housner<sup>1</sup>, no qual o projeto de fundações para edifícios sob excitação devido a terremoto tenha sido discutido;

---

<sup>1</sup> HOUSNER, G.W.. Limit design of structures to resist earthquakes. Proc. of the World Conference on Earthquake Engineering, 1956.

- o da bola oscilante (*bouncing ball*), no qual diz-se que o comportamento do movimento regular é regido pelo número de períodos de excitação entre os impactos subseqüentes e a periodicidade do movimento em si. Esse modelo é semelhante em uma máquina de perfuração de percussão e na publicação de Moon [Moon-2004] diz-se que este modelo também é aplicável para a aceleração dos elétrons em campos eletromagnéticos;
- a trepidação das caixas de engrenagens (*rattling gear boxes*), onde as rodas dentadas não estão carregadas; e
- o oscilador de impacto (*impact oscillator*), investigado com o nome de sistema de vibro-impacto (*vibro-impact system*) por Babitsky<sup>2</sup>. Neste, um novo tipo de bifurcação tem sido encontrado, o *grazing bifurcation*, onde o caso limite de impacto, com velocidade zero, é dado por Nordmark<sup>3</sup>, Budd e Dux<sup>4</sup>.

Com relação a sistemas periódicos no tempo, estes desempenham um papel importante nas Ciências e na Engenharia, e são objeto de investigação desde 1868, iniciada por Mathieu, ao analisar as vibrações de uma membrana elíptica. Desde aquela época, o estudo das equações periódicas no tempo tem encontrado aplicações em muitas áreas, tais como a estabilidade dinâmica de estruturas, a teoria de circuitos, os sistemas de controle, a dinâmica de satélites, de eixos rotativos, de hélices de rotor de helicóptero, da mecânica quântica e da biomecânica (locomoção humana ou animal, ou modelagem do funcionamento do coração) [Sinha-2001].

Em geral, não é possível obter soluções exatas de sistemas não-lineares periódicos no tempo. Para a resolução das equações de movimento em vibro-impacto, a aplicação dos métodos analíticos é muito complexa e limitada, tendo em conta o fato de que as soluções são do tipo transcendental, ou seja, eles não podem ser encontrados em uma forma fechada, uma vez que os movimentos oscilatórios são

---

<sup>2</sup> BABITSKY, V.I.. The theory of vibro-impact systems. Nauka, Moscow, 1976. (em russo)

<sup>3</sup> NORDMARK, A.B.. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. Journal of Sound and Vibration, 145, 279-297, 1991.

<sup>4</sup> BUDD, C., DUX, F.. Chattering and related behaviours in impact oscillators. Proc. R. Soc. Lond. A 347, 365-389, 1994.

interrompidos por impactos. No entanto, as alterações que ocorrem na dinâmica de um determinado sistema mecânico não precisam ser necessariamente quantificadas, ou seja, na maioria das aplicações, pode ser suficiente:

- obter soluções aproximadas;
- saber algo sobre a existência, ou não, de pontos fixos em determinadas regiões do espaço onde os parâmetros podem variar;
- conhecer algo sobre a estabilidade destes pontos fixos; e
- inferir algo sobre os mecanismos de bifurcação.

Para estes casos em que não é necessário quantificar a resposta temporal do sistema, a ideia é, de alguma forma, eliminar a dependência temporal explícita e tornar o sistema autônomo e passível de aplicações de um grande número de teorias desenvolvidas para sistemas invariantes no tempo. Os métodos para a resolução desses problemas são baseados na aplicação de métodos numéricos e gráficos com a interpretação dos dados geométricos, isto é, métodos pelos quais se investigam as alterações qualitativas da dinâmica dos sistemas. O mapa de Poincaré e os diagramas de bifurcação são ferramentas importantes para a análise geométrica da dinâmica de sistemas [Sinha-2001][Strogatz-1994][Mitić-1997][Mattos-1998][Hinrichs-1997].

### **1.3 POSICIONAMENTO DO TRABALHO NA LITERATURA**

O Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFES vem se dedicando em linhas de pesquisa ao estudo da Dinâmica de Sistemas Não Lineares, especificamente em Sistemas com Vibro-Impacto. À frente da Mecânica dos Sólidos o Professor Doutor Márcio Coelho de Mattos.

Em 2006, Damião Mendes de Almeida estudou e analisou um Sistema Com Vibro-Impacto através da aplicação da Transformada Wavelet. O objetivo do estudo é encontrar alguma correlação interessante entre características da resposta do

sistema e os coeficientes Wavelet, as correlações entre alguns coeficientes Wavelet e a folga do sistema e entre o amortecimento do sistema.

Já em 2009, Danilo de Almeida Barbosa verificou a Existência e Estabilidade de Movimentos Periódicos em Sistemas Com Vibro-impacto Harmonicamente Excitados. Um sistema foi analisado na sua forma adimensional onde o foco da pesquisa se concentrou na busca de condições de existência e estabilidade de certos tipos de movimento.

Em 2010, Sideane Mattos De Nadai se concentrou na Existência e a Estabilidade de Movimentos Periódicos em Sistemas Com Vibro-impacto Com Folga Simétrica, em particular, movimentos periódicos de padrão 1-2.

Em 2012, além da defesa desta tese, o mestrando Márcio Luís Zerwes defende sua tese com o tema Existência e Estabilidade de Movimentos Periódicos em Sistemas com Vibro-impacto com Dois Graus de Liberdade.

É possível perceber que o Departamento de Engenharia Mecânica no seu Programa de Pós-Graduação vem buscando cada vez mais aumentar o interesse na área de Sistema com Vibro-Impacto.

#### **1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O interesse pelo estudo de sistemas com vibro-impacto aumentou muito na última década, e atualmente há um congresso internacional dedicado a este tema, o International Conference on Vibro-impact Systems (ICOVIS).

Shaw e Holmes [Shaw - 1983] descobriram movimentos harmônicos, sub-harmônicos e caóticos e analisaram as bifurcações a que estes conduzem. É analisado um sistema de um grau de liberdade, amortecido, com excitação de base e restrição unilateral elástica.

Brindeu [Brindeu - 2000] desenvolveu um novo método direto para o estudo de estabilidade em sistemas de vibro-impacto em que as condições de estabilidade são



diretamente e rapidamente obtidas. O método é aplicado em sistemas de um ou mais graus de liberdade, cujo movimento foi analisado através das Equações de Lagrange. Como exemplos foram apresentados e analisados em detalhe um caso particular com um grau de liberdade realizado por um mecanismo biela-manivela, e, de forma geral, outro sistema com dois graus de liberdade. O autor afirma que, o estudo de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto com dois graus de liberdade é bastante difícil devido ao grande volume de cálculos necessário para a determinação das condições de estabilidade. Com a ajuda das Equações de Lagrange e do método direto, as condições de estabilidade podem ser determinadas eficientemente.

Janin e Lamarque [Janin - 2002] têm como foco as singularidades no mapa de Poincaré de um sistema de um grau de liberdade, amortecido, forçado e com impacto. O comportamento do mapa de Poincaré na vizinhança de um ponto fixo não-diferenciável é investigado, e mostra, a partir do mapa aproximado, que a solução periódica é estável quando os multiplicadores de Floquet são reais.

Kovaleva [Kovaleva - 2004] apresenta a análise de um sistema dinâmico estocástico com impacto de uma estrutura flexível, modelada como um sistema de múltiplos graus de liberdade em que uma das massas, a da base, colide com um anteparo rígido. Para o autor, o exame do modelo reduzido pelo método da média estocástica permite a estimativa das propriedades estatísticas do movimento de vibro-impacto.

Luo e Xie [Luo - 2004] estudam um sistema de dois graus de liberdade com batentes rígidos em ambos os lados de uma massa, amortecidos, e forçados em ambas as massas. Para eles, uma importante aplicação do modelo é na dinâmica de tubos de trocadores de calor de reatores nucleares que são projetados para terem folgas nos pontos de suporte para permitir a expansão térmica. Afirmam que a resposta destes sistemas é muito complicada e o desgaste destes tubos são um dos maiores problemas na indústria nuclear. A passagem do fluxo do fluido e a viga podem resultar em movimentos caóticos e deste modo o comportamento de bifurcação e movimentos caóticos pode prover uma apropriada ferramenta no estudo de desgaste no tubo. No artigo é analisada a estabilidade e a bifurcação de *Hopf* e *pitchfork* para um movimento simétrico de dois impactos por período.

Sosnovskiy e Sherbakov [Sosnovskiy - 2007] realizaram estudos na área de tribo-fadiga associado ao vibro-impacto. No artigo, tratam de danos residuais irregulares, denominados de fenômeno troppy, que ocorrem na área de contato em atrito de rolamento como o resultado de um processo não-estacionário de deformação cíclica em um sistema com vibro-impacto. Eles iniciaram um carregamento com vibro-impacto em um sistema ativo e o resultado experimental das avarias foi estudado. Foi feita a modelagem matemática e simulação de distribuição de tensões.

Bazhenov et al. [Bazhenov - 2009] consideraram diferentes métodos de modelagem do impacto em sistemas com vibro-impacto, seja pela força de interação do contato na qual pode ser considerada como força elástica, bem como a força correspondente a Lei de Hertz, com a ajuda do método da condição de contorno utilizando o coeficiente de restituição. É feita a comparação dos resultados da modelagem por meio desses métodos e propostas recomendações para suas aplicações.

Barbosa [Barbosa-200], as simulações mostraram movimentos periódicos estáveis de padrões incomuns quando comparados com aqueles analisados na literatura. Chama a atenção à existência de movimentos com “elevado” número de impactos por período e a percepção de que nas frequências das quais a frequência de excitação é múltipla a ocorrência destes “movimentos periódicos estranhos” é mais provável.

## **1.5 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO**

A dissertação tem por objetivos diretos:

- analisar as condições de existência e estabilidade de um padrão específico de movimento periódico;
- caracterizar esse movimento específico propor metodologia de análise quanto à sua existência e estabilidade através de um modelo de estado; e

- analisar características do mapa que relaciona estado nos instantes de transição.

Embora diversos autores explorem sistemas com vibro impacto, via de regra, a análise de existência e de estabilidade conduzida nos artigos pressupõe movimentos de topologia simples. As topologias mais complexas são analisadas em geral através de mapas de Poincaré, expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação e localização de atratores caóticos.

No trabalho de Barbosa [Barbosa-200], as simulações mostraram movimentos periódicos estáveis de padrões incomuns quando comparados com aqueles analisados na literatura. Chama a atenção à existência de movimentos com “elevado” número de impactos por período e a percepção de que nas frequências das quais a frequência de excitação é múltipla a ocorrência destes “movimentos periódicos estranhos” é mais provável.

A análise detalhada de topologias de sistemas com vibro-impacto, com a determinação de padrões e a análise da existência não é algo que é metodologicamente explorada na literatura consultada. Faz-se necessária uma minuciosa análise do sistema com vibro-impacto, que possui linearidades fortes, a fim de que se tenha qualitativamente um estudo do comportamento destes sistemas.

A dissertação tem por objetivos diretos:

- analisar as condições de existência e estabilidade de um padrão de movimento periódico específico de topologia simples;
- caracterizar esse movimento e propor metodologia de análise quanto à sua existência e estabilidade através de um modelo de estado; e
- analisar características de mapas que relacionam estados nos instantes de transição.

Adicionalmente, busca-se:

- contextualizar o estado da arte no que respeita ao estudo dos sistemas com vibro-impacto, notadamente sobre existência e estabilidade de movimentos;
- descrever a modelagem do sistema selecionado para estudo, explorando características que facilitem sua análise no espaço-estado.

## **1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

A dissertação é composta de 4 capítulos, além do capítulo introdutório, totalizando portanto 5 capítulos.

O Capítulo 1 apresenta o problema de interesse com várias considerações pertinentes. Dispõe comentários acerca da importância do estudo de sistemas com vibro-impacto, da análise da estabilidade e de hipóteses comumente realizadas em sistemas com impacto e, após uma seção disponível com a revisão bibliográfica. Em seguida está a motivação, objetivos e a estruturação da dissertação.

O Capítulo 2 apresenta o sistema dinâmico e toda a modelagem matemática envolvida. Todo o desenvolvimento na forma adimensional e representado por matrizes para a construção do mapa não linear. São mostrados ainda alguns mapas de movimentos com topologias variadas e mais complexas.

No Capítulo 3 são apresentadas as condições necessárias para a ocorrência da topologia estudada – movimento 1-4 simétrico. As regiões de existência de transições e a região de existência para o movimento de topologia 1-4 simétrico.

No Capítulo 4 são mostradas as considerações necessárias para a análise da estabilidade para o padrão de movimento periódico escolhido – movimento 1-4. A comparação da metodologia utilizada com outra metodologia e a influência dos parâmetros ou condições iniciais na dinâmica global do sistema.

E por fim, no Capítulo 5, as conclusões sobre o movimento periódico estudado e as análises com as proposições para futuros trabalhos.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

O capítulo tem como objetivo apresentar o equacionamento do movimento em sua forma autônoma, os detalhes do mapa não-linear, a indexação de topologias de movimento, bem como as condições de existência.

### 2.1 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

O modelo físico do sistema a ser estudado está descrito na Figura 2.1 a seguir. Consiste de uma base oscilante com um corpo de massa  $m$  que está preso à base através de um conjunto de molas com coeficiente de rigidez  $k_1/2$  e um amortecedor viscoso com coeficiente de amortecimento  $c_1/2$ . Nesse primeiro conjunto, a folga entre o corpo e um segundo conjunto de molas e amortecedores é denominada por  $\Delta$ . O movimento do corpo de massa  $m$  é limitado por outras duas molas com coeficiente de rigidez  $k_2/2$  e dois amortecedores viscosos com coeficiente de amortecimento  $c_2/2$ . O corpo de massa  $m$  pode se deslocar em função da oscilação  $s = s_0 \cdot \cos(p \cdot t)$ .

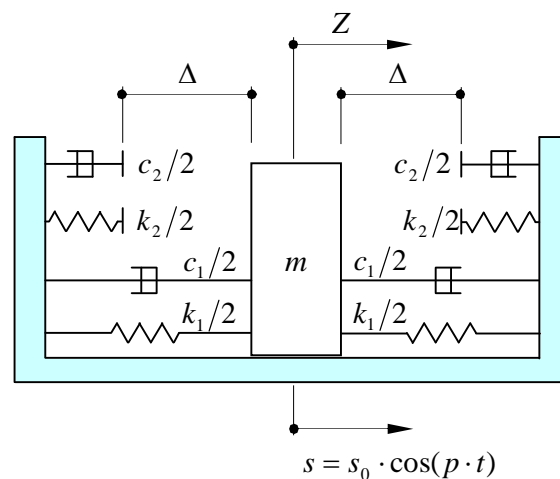


Figura 2.1: Sistema com mola, amortecedor e oscilação da base.

Com a aplicação da Lei da Mecânica Clássica de Newton, as equações de movimento podem ser escritas conforme a equação (2.1) e a equação (2.2). O movimento do bloco e da base pode ser dado, respectivamente, pelas coordenadas  $z$  e  $s$ .

Podem-se definir as equações do movimento com:

(i) Para  $z - s < \Delta$ ;

(ii) Para  $z - s > \Delta$

Definindo  $(z - s) = y$  como o movimento relativo, podem-se escrever as duas situações possíveis:

(i) Para:  $z - s < \Delta$ , ou seja,  $|y| < \Delta$  tem-se:

$$-k_1 y - c_1 y' = m y'' + m s'' \quad (2.1)$$

$$m y'' + c_1 y' + k_1 y = -m s'', \text{ para } |y| < \Delta \quad (2.2)$$

(ii) Para:  $z - s > \Delta$ , ou seja,  $|y| > \Delta$  tem-se:

$$-k_1(z - s) - \hat{k}_1(z - s - \Delta) - c_1(z' - s') - \hat{c}_1(z' - s') = m z'' \quad (2.3)$$

$$-(k_1 + \hat{k}_1)y - (c_1 + \hat{c}_1)y' + \hat{k}_1\Delta = m y'' + m s'' \quad (2.4)$$

$$m y'' + c_2 y' + k_2 y = -m s'' + \hat{k}_1\Delta, \text{ para } |y| > \Delta \quad (2.5)$$

O movimento harmônico da base é definido por  $s = s_0 \cdot \cos(p \cdot t)$ , onde  $s_0$  e  $p$  são a amplitude e a frequência da excitação respectivamente.

Para expressar as equações dinâmicas do sistema numa forma adimensional, define-se:

$$\tau = \omega_0 \cdot t, \quad x = \frac{y}{y_0}, \quad \omega = \frac{p}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} \quad (2.6)$$

Onde  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação do sistema e  $\xi$  o fator de amortecimento.

De modo que, para as duas opções de movimento (i) e (ii), têm-se:

(i) Para  $z - s < \Delta$ , ou seja,  $|y| < \Delta$  a equação (2.2) pode ser escrita na forma:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c_1 \frac{dy}{dt} + k_1 y = -m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.7)$$

Manipulando a equação (2.7) adequadamente de acordo com as equações (2.6), tem-se:

$$m \omega_0^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + c_1 \omega_0 \frac{dy}{d\tau} + k_1 y = -m \omega_0^2 \frac{d^2 s}{d\tau^2} \quad (2.8)$$

Dividindo a equação (2.8) por  $m \omega_0^2$ , tem-se:

$$\ddot{y} + \frac{c_1}{m \omega_0} \dot{y} + \frac{k_1}{m \omega_0^2} y = -\ddot{s} \quad (2.9)$$

Fazendo:  $y = x \cdot y_0$ ,  $\frac{dy}{dx} = y_0$ ,  $dy = y_0 \cdot dx$ ,  $\ddot{y} = y_0 \cdot \ddot{x}$ , tem-se:

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m \omega_0} \dot{x} + \frac{k_1}{m \omega_0^2} x = -\frac{\ddot{s}}{y_0} \quad (2.10)$$



Recordando que  $s = s_0 \cos pt = s_0 \cos p \frac{\tau}{\omega_0} = s_0 \cos \omega \tau$  tem-se:  $\ddot{s} = -s_0 \omega^2 \cos \omega \tau$ .

Logo, a equação (2.10) ficará:

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m\omega_0} \dot{x} + \frac{k_1}{m\omega_0^2} x = \frac{s_0}{y_0} \omega^2 \cos \omega \tau \quad (2.11)$$

Recordando das relações em (2.6):  $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}$  e  $2\xi = \frac{c_1}{\sqrt{k \cdot m}} = \frac{c_1}{m \cdot \omega_0}$ , a equação (2.11)

ficará:

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + x = \frac{s_0}{y_0} \omega^2 \cos \omega \tau \quad (2.12)$$

Adotando:  $y_0 = s_0$ , tem-se a equação (2.2) na forma adimensional:

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + x = \omega^2 \cos \omega \tau \quad (2.13)$$

(ii) Para  $z - s > \Delta$ , ou seja,  $|y| > \Delta$  a equação (2.5) pode ser escrita na forma:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c_1 \frac{dy}{dt} + \hat{c}_1 \frac{dy}{dt} + k_1 y + \hat{k}_1 y = -m \frac{d^2 s}{dt^2} + \hat{k}_1 \Delta \quad (2.14)$$

Manipulando a equação (2.14) adequadamente de acordo com as equações (2.6), tem-se:

$$m\omega_0^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + c_1 \omega_0 \frac{dy}{d\tau} + \hat{c}_1 \omega_0 \frac{dy}{d\tau} + k_1 y + \hat{k}_1 y = -m\omega_0^2 \frac{d^2 s}{d\tau^2} + \hat{k}_1 \Delta \quad (2.15)$$

Dividindo a equação (2.15) por  $m\omega_0^2$ , tem-se:

$$\ddot{y} + \frac{c_1}{m\omega_0} \dot{y} + \frac{\hat{c}_1}{m\omega_0} \dot{y} + \frac{k_1}{m\omega_0^2} y + \frac{\hat{k}_1}{m\omega_0^2} y = -\ddot{s} + \frac{\hat{k}_1 \Delta}{m\omega_0^2} \quad (2.16)$$

Fazendo:  $y = x \cdot y_0$ ,  $\frac{dy}{dx} = y_0$ ,  $dy = y_0 \cdot dx$ ,  $\ddot{y} = y_0 \cdot \ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m\omega_0} \dot{x} + \frac{\hat{c}_1}{m\omega_0} \dot{x} + \frac{k_1}{m\omega_0^2} x + \frac{\hat{k}_1}{m\omega_0^2} x = -\frac{\ddot{s}}{y_0} + \frac{\hat{k}_1 \Delta}{m\omega_0^2 y_0} \quad (2.17)$$

Recordando que  $s = s_0 \cos pt = s_0 \cos p \frac{\tau}{\omega_0} = s_0 \cos \omega \tau$  tem-se:  $\ddot{s} = -s_0 \omega^2 \cos \omega \tau$ .

Logo, a equação (2.17) ficará:

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m\omega_0} \dot{x} + \frac{\hat{c}_1}{m\omega_0} \dot{x} + \frac{k_1}{m\omega_0^2} x + \frac{\hat{k}_1}{m\omega_0^2} x = \frac{s_0}{y_0} \omega^2 \cos \omega \tau + \frac{\hat{k}_1 \Delta}{m\omega_0^2 y_0} \quad (2.18)$$

Recordando das relações em (2.6):  $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}$  e  $2\xi = \frac{c_1}{\sqrt{k \cdot m}} = \frac{c_1}{m \cdot \omega_0}$ , adotando  $y_0 = s_0$  e

definindo que  $\frac{\hat{c}_1}{c_1} = \Omega_c$  e  $\frac{\hat{k}_1}{k_1} = \Omega_k$ , logo:  $\hat{c}_1 = c_1 \Omega_c$  e  $\hat{k}_1 = k_1 \Omega_k$ , a equação (2.18) ficará:

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + 2\xi \Omega_c \dot{x} + x + \Omega_k x = \omega^2 \cos \omega \tau + \Omega_k \Delta \quad (2.19)$$

Quando o corpo atinge o segundo conjunto de mola e amortecedor viscoso, o deslocamento  $(z - s) = y$  descrito pela equação (2.14) equivale justamente à folga  $\Delta$ , sendo necessário escrever essa folga na forma adimensional. Definindo  $\varepsilon = \frac{\Omega \cdot \Delta}{s_0}$

e adotando:  $y \leq \Delta \Rightarrow \frac{y}{y_0} \leq \varepsilon$ , tem-se a equação (2.19) na forma adimensional:

$$\ddot{x} + 2\xi(1 + \Omega_c)\dot{x} + (1 + \Omega_k)x = \omega^2 \cos \omega \tau + \Omega_k \varepsilon \quad (2.20)$$

Pode-se definir, de forma geral, tanto para a condição (i):  $|y| < \Delta$  e (ii):  $|y| > \Delta$  têm-se as condições das equações (2.13) e (2.20) como:

$$\ddot{x} + 2\xi(1 + \alpha \cdot \Omega_c)\dot{x} + (1 + \alpha \cdot \Omega_k)x = \omega^2 \cos \omega\tau + \alpha \cdot \Omega_k \varepsilon \quad (2.21)$$

Na equação (2.21), ainda pode-se escrever:

$$\ddot{x} + 2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\dot{x} + (1 + \alpha \cdot r_k)x = \omega^2 \cos \omega\tau + \alpha \cdot r_k \varepsilon \quad (2.22)$$

Onde:  $\alpha = \begin{cases} 0, & |x| < \varepsilon \\ 1, & |x| > \varepsilon \end{cases}, \varepsilon = \frac{\Delta}{y_0}, y_0 = s_0$

O próximo passo é a análise da resposta da equação (2.22) e para isso, é necessário lembrar a consideração descrita no capítulo anterior do ínfimo intervalo de duração da transição. Com isso, as condições de início do movimento são a posição e a velocidade no fim do processo de transição. Portanto, o tempo também será contado a partir do instante final da transição. Então:  $x(\hat{\tau}) = \hat{x}$  e  $\dot{x}(\hat{\tau}) = \hat{v}$ .

Supõe-se que o sistema seja sub-amortecido, ou seja, com  $\xi < 1$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{\lambda_1(\tau-\bar{\tau})} + a_2 e^{\lambda_2(\tau-\bar{\tau})} + A \cos \phi \cos \omega\tau + A \sin \phi \sin \omega\tau + R_i \\ \dot{x} &= a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-\bar{\tau})} + a_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-\bar{\tau})} - A \omega \cos \phi \sin \omega\tau + A \omega \sin \phi \cos \omega\tau \\ \ddot{x} &= a_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1(\tau-\bar{\tau})} + a_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2(\tau-\bar{\tau})} - A \omega^2 \cos \phi \cos \omega\tau - A \omega^2 \sin \phi \sin \omega\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

Onde:

$$\lambda_1 = -\xi(1 + \alpha \cdot r_c) - j\sqrt{\xi^2 - 2\xi^2\alpha \cdot r_c - \xi^2\alpha^2 \cdot r_c^2 + 1 + \alpha \cdot r_c}$$

$$\lambda_2 = -\xi(1 + \alpha \cdot r_c) + j\sqrt{\xi^2 - 2\xi^2\alpha \cdot r_c - \xi^2\alpha^2 \cdot r_c^2 + 1 + \alpha \cdot r_c}$$

$$A = \frac{\omega^2}{\sqrt{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}} \quad (2.24)$$

$$\cos \phi = \frac{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)}{\sqrt{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega}{\sqrt{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}}$$

Logo:

$$A_c = A \cdot \cos \phi = \frac{\omega^2 \cdot [(1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2]}{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2} \quad (2.25)\text{-a}$$

$$A_s = A \cdot \text{sen } \phi = \frac{\omega^2 \cdot [2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega]}{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2} \quad (2.25)\text{-b}$$

As constantes  $a_1$  e  $a_2$  nas equações (2.22) são dadas por:

$$a_1 = \frac{\lambda_2(\hat{x} - A_c \cos(\omega \cdot \tau_1) - A_s \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - R_i) - (\hat{v} + A_c \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - A_s \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \tau_1))}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.26)\text{-a}$$

$$a_2 = \frac{-\lambda_1(\hat{x} - A_c \cos(\omega \cdot \tau_1) - A_s \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - R_i) + (\hat{v} + A_c \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - A_s \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \tau_1))}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

O termo independente na equação (2.23)  $R_i$ :

$$R_i = \left( \frac{\alpha \cdot r_k \cdot \varepsilon}{1 + \alpha \cdot r_k} \right) \quad (2.27)$$

Quando todos os termos relacionados em (2.24) e (2.25) e as respostas contidas em (2.23) são substituídos na equação (2.22) verifica-se a equação de movimento é igual a  $\omega^2 \cos \omega \tau + \alpha \cdot r_k \varepsilon$ , conforme se pode verificar no 2º membro da equação (2.22). Quando os termos de (2.24) e (2.25) são substituídos em  $x(\tau)$  e  $\dot{x}(\tau)$ , equações em (2.23), pode ser observado se a resposta satisfaz as condições iniciais do problema. Dessa forma, para  $\tau = \hat{\tau}$ , encontra-se  $x(\hat{\tau}) = \hat{x}$  e  $\dot{x}(\hat{\tau}) = \hat{v}$ , conforme esperado.

## 2.2 MAPA ENVOLVENDO OS ESTADOS NOS INSTANTES DE TRANSIÇÃO

Observando as equações em (2.23) com relação à resposta e fazendo a suposição de que o estado do sistema no instante  $\tau_i$  seja conhecido. Enquanto o ponto de transição não for atingido, o estado do sistema pode ser determinado pelas equações (2.28).

$$x = a_{1i} e^{\lambda_1(\tau-\tau_i)} + a_{2i} e^{\lambda_2(\tau-\tau_i)} + A_c \cos \omega \tau + A_s \sin \omega \tau + R_i \quad (2.28)\text{-a}$$

$$\dot{x} = a_{1i} \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-\tau_i)} + a_{2i} \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-\tau_i)} - A_c \omega \sin \omega \tau + A_s \omega \cos \omega \tau \quad (2.28)\text{-b}$$

Da mesma forma que em (2.24), (2.25) e (2.26), temos:

$$\lambda_1 = -\xi(1 + \alpha \cdot r_c) - j\sqrt{\xi^2 - 2\xi^2\alpha \cdot r_c - \xi^2\alpha^2 \cdot r_c^2 + 1 + \alpha \cdot r_c}$$

$$\lambda_2 = -\xi(1 + \alpha \cdot r_c) + j\sqrt{\xi^2 - 2\xi^2\alpha \cdot r_c - \xi^2\alpha^2 \cdot r_c^2 + 1 + \alpha \cdot r_c}$$

$$A = \frac{\omega^2}{\sqrt{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}} \quad (2.29)$$

$$\cos \phi = \frac{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)}{\sqrt{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega}{\sqrt{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}}$$

logo:

$$A_c = A \cdot \cos \phi = \frac{\omega^2 \cdot [(1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2]}{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2} \quad (2.30)\text{-a}$$

$$A_s = A \cdot \text{sen } \phi = \frac{\omega^2 \cdot [2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega]}{((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2} \quad (2.30)\text{-b}$$

As constantes  $a_1$  e  $a_2$  nas equações (2.28), ficarão conforme a seguir:

As constantes  $a_1$  e  $a_2$  nas equações (2.22) são dadas por:

$$a_1 = \frac{\lambda_2(\hat{x} - A_c \cos(\omega \cdot \tau_1) - A_s \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - R_i) - (\hat{v} + A_c \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - A_s \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \tau_1))}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.31)$$

$$a_2 = \frac{-\lambda_1(\hat{x} - A_c \cos(\omega \cdot \tau_1) - A_s \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - R_i) + (\hat{v} + A_c \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot \tau_1) - A_s \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \tau_1))}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Pode-se escrever o movimento através do vetor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix}$  que representa o estado do sistema, conforme a equação (2.28) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{x}(\hat{\tau}) + \tilde{\mathbf{B}}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \hat{\tau} \\ \sin \omega \hat{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}_i \quad (2.32)$$

Onde:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_1 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} & e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})}) & \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} \end{bmatrix} \quad (2.33)\text{-a}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_c & A_s \\ \omega \cdot A_s & -\omega \cdot A_c \end{bmatrix} \quad (2.33)\text{-b}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.33)\text{-c}$$

$$\mathbf{e}: \left. \begin{aligned} \tilde{b}_{11} &= -A_c (\lambda_2 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_1 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})}) - \omega \cdot A_s (e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{12} &= -A_s (\lambda_2 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_1 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})}) + \omega \cdot A_c (e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{21} &= -A_c \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})}) - \omega \cdot A_s (\lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{22} &= -A_s \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})}) + \omega \cdot A_c (\lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})}) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Observa-se que  $\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) \therefore -\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$ , como pode ser verificado:

$$\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A_c & -A_s \\ -\omega A_s & +\omega A_c \end{bmatrix} \therefore -\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{bmatrix}, \text{ com:}$$

$$\begin{cases} \widehat{b}_{11} = -A_c \left( \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) - \omega A_s \left( e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) = \widetilde{b}_{11} \\ \widehat{b}_{12} = -A_s \left( \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) + \omega A_c \left( e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) = \widetilde{b}_{12} \\ \widehat{b}_{21} = -A_c \lambda_a \lambda_b \left( e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) - \omega A_s \left( \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) = \widetilde{b}_{21} \\ \widehat{b}_{22} = -A_s \lambda_a \lambda_b \left( e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) + \omega A_c \left( \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) = \widetilde{b}_{22} \end{cases}$$

Assim, pode-se escrever:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) \quad (2.35)$$

Tem-se ainda na equação (2.32), o termo independente que pode definido como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Sendo:

$$\mathbf{M}_1 = \left( -\frac{e^{\lambda_1 \tau} \cdot \lambda_2}{e^{\lambda_1 T} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{\lambda_2 \tau} \cdot \lambda_1}{e^{\lambda_2 T} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} + 1 \right) \quad (2.37)\text{-a}$$

$$\mathbf{M}_2 = \left( -\frac{\lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \tau} \cdot \lambda_2}{e^{\lambda_1 T} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} \cdot \lambda_1}{e^{\lambda_2 T} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \quad (2.37)\text{-b}$$

$$\mathbf{R}_i = \left( \frac{\alpha \cdot r_k \cdot \varepsilon}{1 + \alpha \cdot r_k} \right) \quad (2.37)\text{-c}$$

Desta forma, observando a equação (2.32), os termos de (2.33)-a, (2.33)-b, (2.33)-c e a igualdade em (2.35), a solução baseada no estado e no instante  $\hat{\tau}$  é:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{x}(\hat{\tau}) - \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \hat{\tau} \\ \sin \omega \hat{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}_i \quad (2.38)$$



onde  $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x}]^T$  é o vetor de estado,  $\mathbf{A}$  é a matriz dinâmica do sistema e  $\mathbf{B}$  trabalha como uma matriz modificada de entrada.

Se for considerado o instante  $\tau = \hat{\tau}$  na equação (2.38), a equação trivial é encontrada, ou seja,  $\mathbf{x}(\hat{\tau}) = \mathbf{x}(\hat{\tau})$ , já que  $\mathbf{A}(\hat{\tau}, \hat{\tau}) = \mathbf{I}$ , com  $\mathbf{I}$  representando a matriz identidade.

### 2.3 INDEXAÇÃO DE TOPOLOGIAS DE MOVIMENTOS EM RESPOSTA ESTACIONÁRIA

Uma resposta estacionária do sistema, quando expressa pela equação (2.38), pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}_{i+n} = \mathbf{x}_i \forall (i, n) \in \mathbb{N}, i > i_0, \quad (2.39)$$

onde  $i_0$  representa um número de transições a partir do qual o estado estacionário é alcançado.

Pode-se agora caracterizar o movimento do estado estacionário por duas de suas características, a saber:

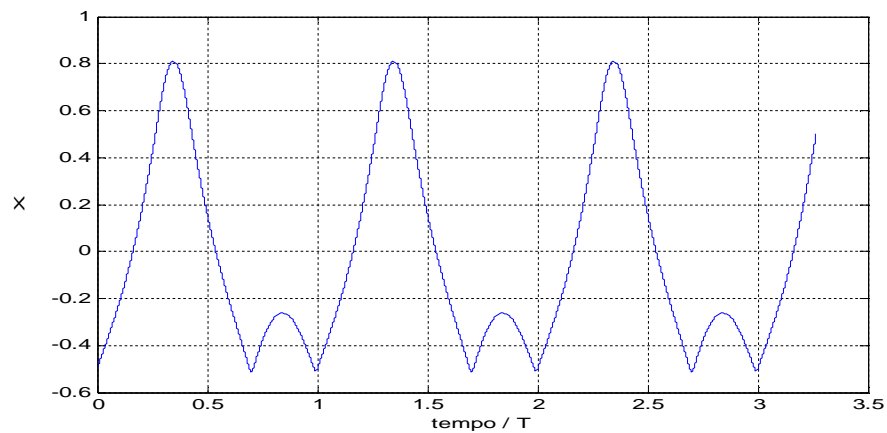
- a razão entre o período da resposta e o período da excitação, que denominaremos ordem do período da resposta;
- o número de transições que ocorrem dentro do período da resposta;

Assim, um movimento 1-4 indica que o período da resposta é o mesmo da excitação e ocorrem 4 transições a cada período do movimento.

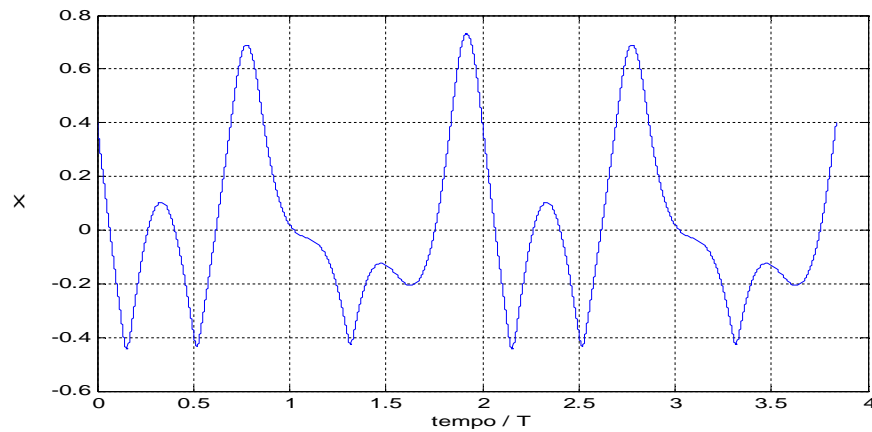
Da Figura 2.2 até a Figura 2.13, apresentam-se algumas topologias de movimento:

Pode-se observar que da Figura 2.2 até a Figura 2.6, o único parâmetro que se altera é o valor de  $\varepsilon$ . Para os outros valores:  $\omega$ ,  $\xi$ ,  $r_c$  e  $r_k$  permanecem os mesmos.

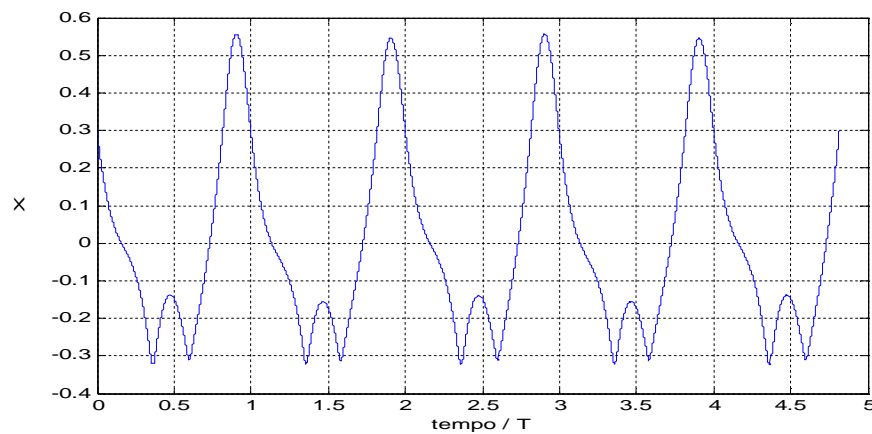
Esse destaque tem como objetivo mostrar que o sistema proposto na Figura 2.1 é sensível ao parâmetro  $\varepsilon$ , ou seja, o sistema é dependente desse valor.



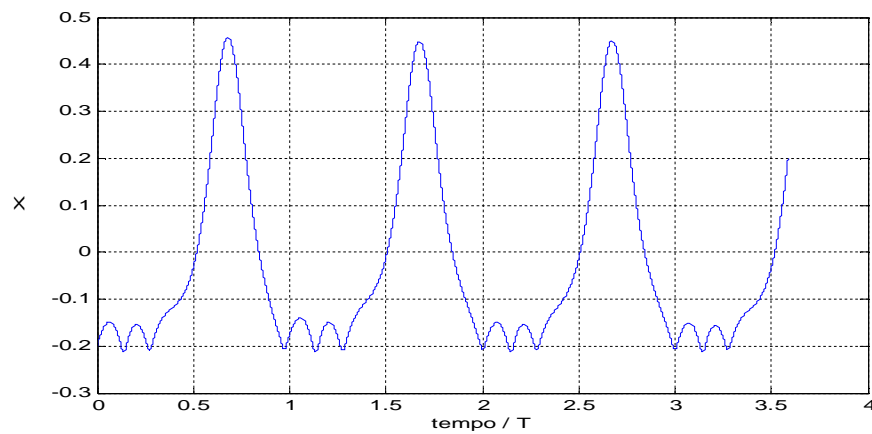
**Figura 2.2:** Movimento 1-6, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 10$ .



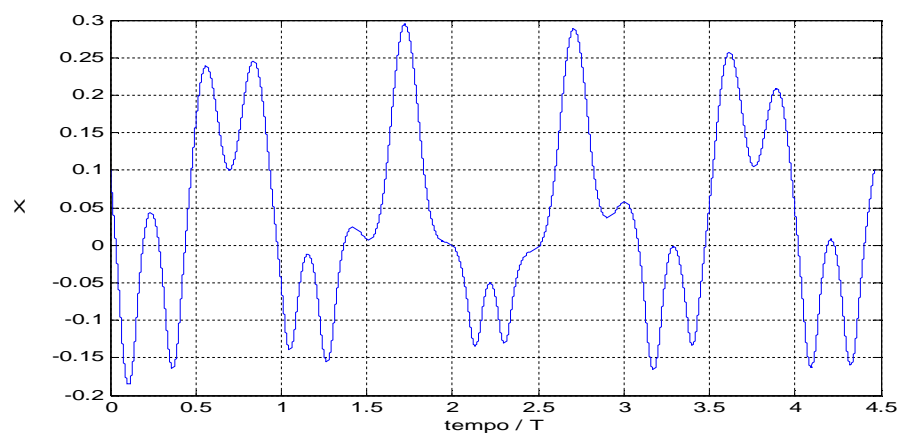
**Figura 2.3:** Movimento 2-10, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,4$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 10$ .



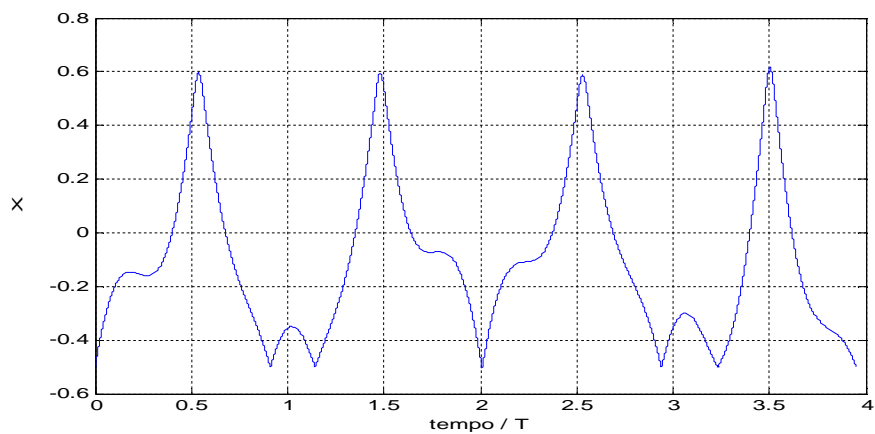
**Figura 2.4:** Movimento 1-6, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,3$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 10$ .



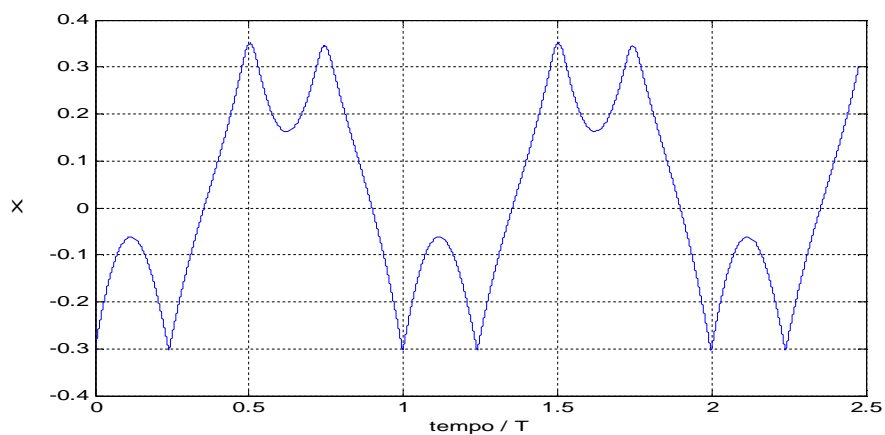
**Figura 2.5:** Movimento 1-8, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,2$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 10$ .



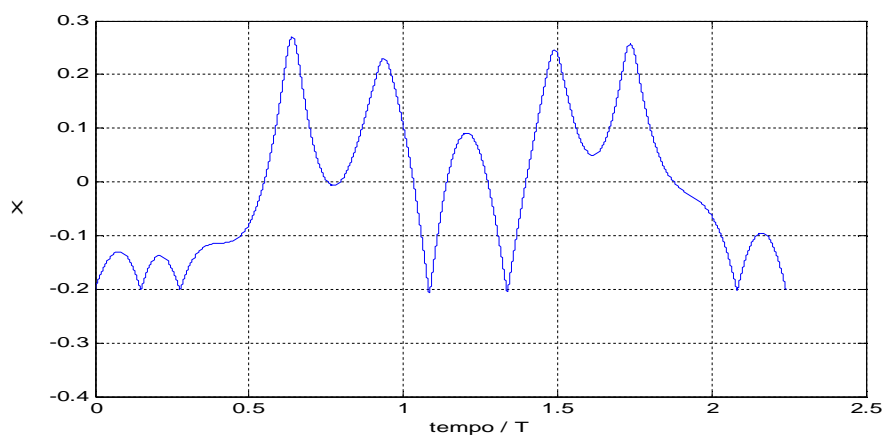
**Figura 2.6:** Movimento não-periódico, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 10$ .



**Figura 2.7:** Movimento quase-periódico, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 100$ .



**Figura 2.8:** Movimento 1-8, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,3$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 100$ .



**Figura 2.9:** Movimento não-periódico, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,2$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 100$ .

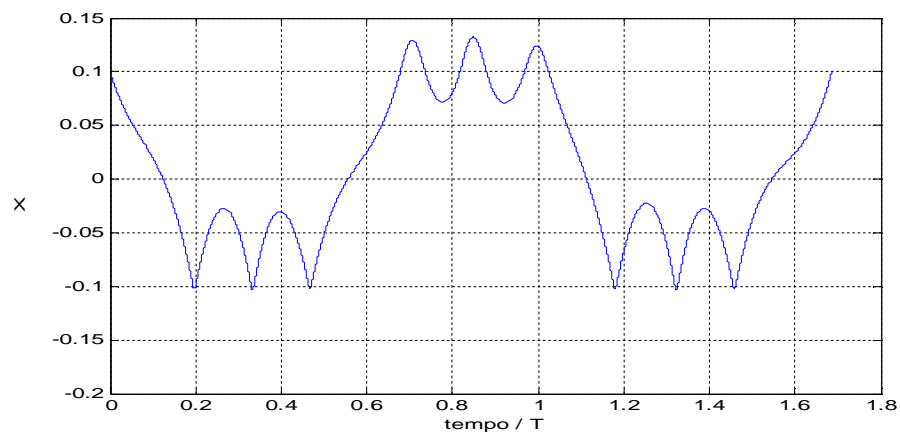


Figura 2.10: Movimento 1-12, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 100$ .

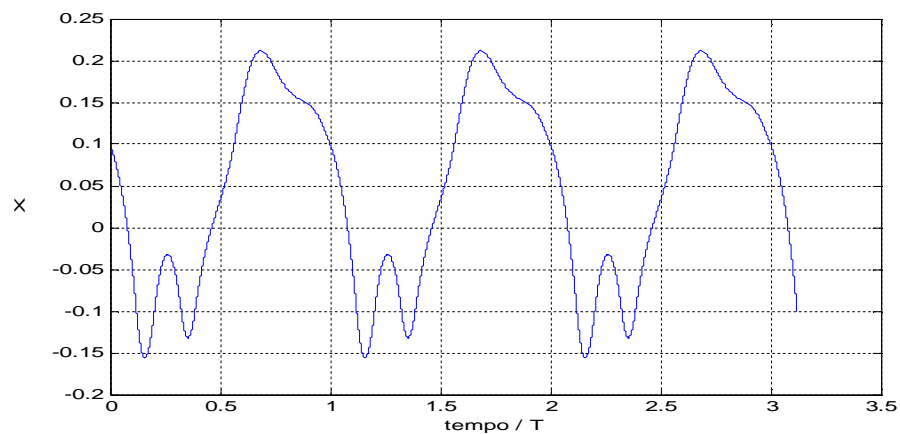


Figura 2.11: Movimento 1-6, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $r_c = 10$ ;  $r_k = 10$ .

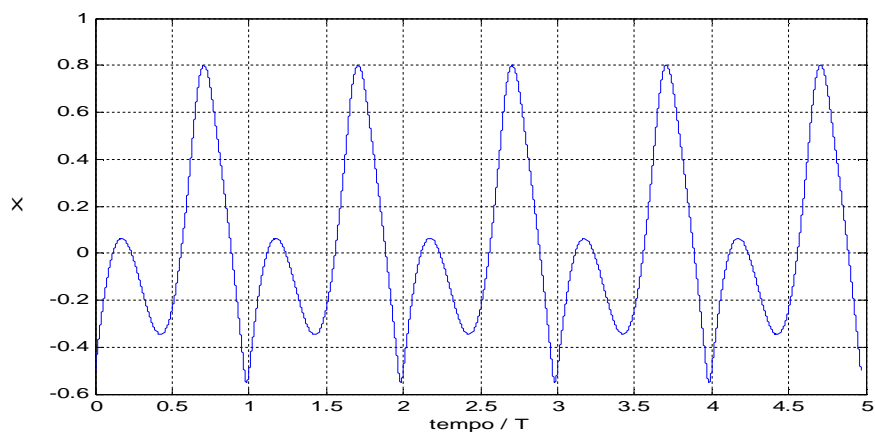


Figura 2.12: Movimento 1-6, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,01$ ;  $r_c = 1$ ;  $r_k = 100$ .

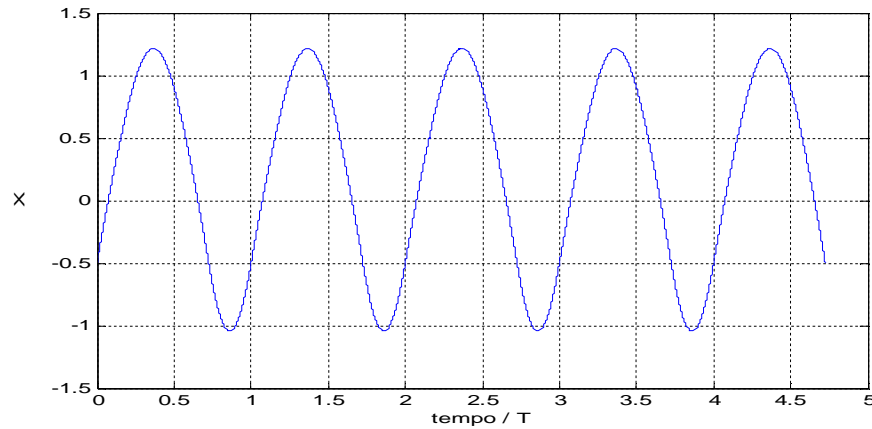


Figura 2.13: Movimento 1-4, com  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $r_c = 0$ ;  $r_k = 1$ .

## 2.4 EXISTÊNCIA DE MOVIMENTO PERIÓDICO 1-4 SIMÉTRICO

As condições de existência de um movimento periódico de topologia 1-4 podem ser escritas como:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+4} = x_i &\Rightarrow x_4 = x_0 \\ \tau_{i+4} = \tau_i + T &\Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + T \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Podem-se definir também dois tipos distintos de movimentos 1-4 no tempo, a saber:

- Movimento simétrico no tempo:  $\tau_{i+4} - \tau_{i+2} = \tau_{i+2} - \tau_i$
- Movimento não simétrico no tempo:  $\tau_{i+4} - \tau_{i+2} \neq \tau_{i+2} - \tau_i$

No presente trabalho, será tratado apenas o movimento simétrico.

Para que o movimento periódico proposto seja simétrico considerando ainda o movimento 1-4, ainda é necessário:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+4} = x_i &\Rightarrow x_4 = x_0 \\ \tau_{i+4} = \tau_i + T &\Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \\ \tau_{i+2} = \tau_i + \frac{T}{2} &\Rightarrow \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Para facilitar a escrita, pode-se escrever a equação (2.38), considerando um movimento de topologia 1-4 e os estados de transição da seguinte forma:

$$x_1 = A_0 \cdot x_0 - A_0 \cdot B_0 \cdot f_0 + B_0 \cdot f_1 + M_0 \cdot R_0 \quad (2.41)\text{-a}$$

$$x_2 = A_1 \cdot x_1 - A_1 \cdot B_1 \cdot f_1 + B_1 \cdot f_2 + M_1 \cdot R_1 \quad (2.41)\text{-b}$$

$$x_3 = A_2 \cdot x_2 - A_2 \cdot B_2 \cdot f_2 + B_2 \cdot f_3 + M_2 \cdot R_2 \quad (2.41)\text{-c}$$

$$x_4 = A_3 \cdot x_3 - A_3 \cdot B_3 \cdot f_3 + B_3 \cdot f_4 + M_3 \cdot R_3 \quad (2.41)\text{-d}$$

Onde:  $A_i$ ,  $B_i$  e  $M_i \cdot R_i$  foram definidas em (2.33)-a, (2.33)-b e (2.37).

O termo  $f_i = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix}$ , de acordo com a equação (2.38), define a condição de fase para o movimento 1-4.

Logo, pode-se escrever o termo  $f_i$  como:

$$f_m = C_m \cdot f_0 \quad (2.42)$$

Onde:

$$C_m = \begin{bmatrix} \cos(r_k \cdot 2\pi) & -\text{sen}(r_k \cdot 2\pi) \\ \text{sen}(r_k \cdot 2\pi) & \cos(r_k \cdot 2\pi) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Da equação (2.43), para o caso simétrico, tem-se que:

$$r_k = \frac{k}{n}, \quad k = n, \dots, 1 \quad (2.44)$$

Onde  $n$  é o número de transições em um período  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ , já que:

$$\begin{cases} \tau_k = \tau_0 + r_k \cdot T \\ \tau_n = \tau_0 + T \end{cases}, n > 0 \text{ e } k = n, \dots, 1 \quad (2.45)$$

Logo, das equações (2.42) e (2.43) tem-se:

$$f_0 = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \text{sen } \omega \tau_0 \end{bmatrix}, f_1 = \begin{bmatrix} -\text{sen } \omega \tau_0 \\ \cos \omega \tau_0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -\cos \omega \tau_0 \\ -\text{sen } \omega \tau_0 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} \text{sen } \omega \tau_0 \\ -\cos \omega \tau_0 \end{bmatrix} \text{ e } f_4 = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \text{sen } \omega \tau_0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Mattos [Mattos-2010] analisou as condições possíveis do movimento 1-2. Para um movimento 1-4, também é necessário à verificação possível para a ocorrência do movimento.

Para isso, a verificação da condição de simetria imposta no início da seção faz-se necessário:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+4} = x_i &\Rightarrow x_4 = x_0 \\ \tau_{i+4} = \tau_i + T &\Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \\ \tau_{i+2} = \tau_i + \frac{T}{2} &\Rightarrow \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$



Partindo-se, então, dos estados de transição  $x_2$  e  $x_4$ , tem-se as equações a seguir:

$$x_2 = A_1 \cdot x_1 - A_1 \cdot B_1 \cdot f_1 + B_1 \cdot f_2 + M_1 \cdot R_1 \quad (2.48)$$

$$x_4 = A_3 \cdot x_3 - A_3 \cdot B_3 \cdot f_3 + B_3 \cdot f_4 + M_3 \cdot R_3 \quad (2.49)$$

Substituindo os valores de  $x_1$  e  $x_3$ , que podem ser verificados nas equações (2.41)-a e (2.41)-c, tem-se as novas equações para  $x_2$  e  $x_4$ :

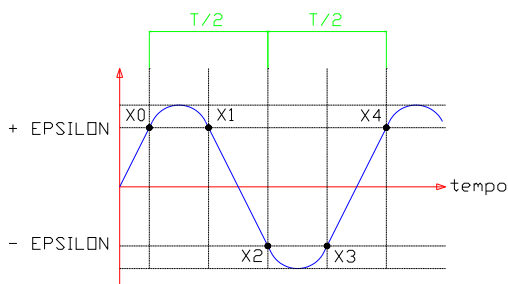
$$x_2 = A_1 \cdot A_0 \cdot x_0 - A_1 \cdot A_0 \cdot B_0 \cdot f_0 + A_1 \cdot B_0 \cdot f_1 + A_1 \cdot M_0 \cdot R_0 - A_1 \cdot B_1 \cdot f_1 + B_1 \cdot f_2 + M_1 \cdot R_1 \quad (2.50)$$

$$x_4 = A_3 \cdot A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot A_2 \cdot B_2 \cdot f_2 + A_3 \cdot B_2 \cdot f_3 + A_3 \cdot M_2 \cdot R_2 - A_3 \cdot B_3 \cdot f_3 + B_3 \cdot f_4 + M_3 \cdot R_3 \quad (2.51)$$

Fazendo  $x_4 + x_2$ , tem-se:

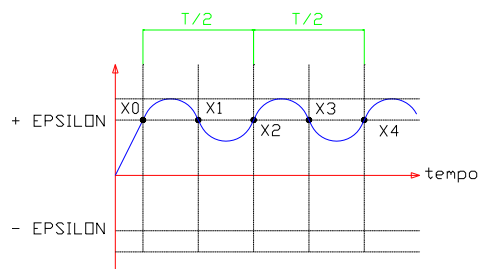
$$x_4 + x_2 = A_3 A_2 x_2 + A_1 A_0 x_0 + [A_3 A_2 B_2 - A_1 A_0 B_0] \cdot f_0 + [B_3 - B_1] \cdot f_1 + (-A_1 B_1 f_1 - A_3 B_3 f_3) + (A_1 B_0 f_1 + A_3 B_2 f_3) + A_1 \cdot M_0 \cdot R_0 + A_3 \cdot M_2 \cdot R_2 + M_1 \cdot R_1 + M_3 \cdot R_3 \quad (2.52)$$

Para as condições impostas de um movimento 1-4, podemos ter duas possibilidades de movimento, conforme as Figura 2.14 e 2.15, a seguir:



**Figura 2.14:** Padrão de movimento com

$$x_{i+2} = -x_i.$$



**Figura 2.15:** Padrão de movimento com

$$x_{i+2} = x_i.$$

Para os padrões de movimento possíveis nas Figuras 2.14 e 2.15, implicará nas condições a seguir:

$$\left. \begin{aligned} A_0 = A_2; B_0 = B_2; R_0, R_2 \neq 0 &\Rightarrow \alpha = 1 \\ A_1 = A_3; B_1 = B_3; R_1 = R_3 = 0 &\Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Logo, a equação (2.52) ficará:

$$x_4 + x_2 = A_1 A_0 \cdot (x_0 + x_2) \quad (2.54)$$

Como o movimento periódico proposto impõe:  $x_4 = x_0$ , tem-se na equação (2.54):

$$x_0 + x_2 = A_1 A_0 \cdot (x_0 + x_2) \quad (2.55)$$

As soluções possíveis para a relação em (2.55), são:

- $A_0 \cdot A_1 = I$ , esta solução não está relacionada ao problema físico;
- $x_0 + x_2 = 0$ , esta solução é a de interesse, pois  $x_0 = -x_2$  e  $x_4 = -x_2$ .

Portanto, tomando-se a relação da equação (2.55) e as Figuras 2.14 e 2.15, somente o movimento simétrico 1-4 conforme a Figura 2.14 é possível de ocorrer.

### 3. MAPA DE MOVIMENTO PERIÓDICO

Neste terceiro capítulo, apresenta-se inicialmente o movimento de topologia 1-4 simétrico, a partir daí, o método para a análise de existência do movimento. Com o intuito de ilustrar a aplicação desta metodologia, analisam-se os movimentos de topologia 1-4.

#### 3.1 CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS 1-4 SIMÉTRICOS

As condições de existência de um movimento de topologia 1-4 podem ser escritas como:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+4} = x_i &\Rightarrow x_4 = x_0 \\ \tau_{i+4} = \tau_i + T &\Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \\ \tau_{i+2} = \tau_i + \frac{T}{2} &\Rightarrow \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Considerando um movimento de topologia 1-4 temos para a equação (2.38):

$$x_1 = A_0 \cdot x_0 - A_0 \cdot B_0 \cdot f_0 + B_0 \cdot f_1 + M_0 \cdot R_0 \quad (3.2)\text{-a}$$

$$x_2 = A_1 \cdot x_1 - A_1 \cdot B_1 \cdot f_1 + B_1 \cdot f_2 + M_1 \cdot R_1 \quad (3.2)\text{-b}$$

$$x_3 = A_2 \cdot x_2 - A_2 \cdot B_2 \cdot f_2 + B_2 \cdot f_3 + M_2 \cdot R_2 \quad (3.2)\text{-c}$$

$$x_4 = A_3 \cdot x_3 - A_3 \cdot B_3 \cdot f_3 + B_3 \cdot f_4 + M_3 \cdot R_3 \quad (3.2)\text{-d}$$

Onde  $A_i = A_i(\tau - \tau_i)$

Substituindo as equações (3.2)-a, (3.2)-b e (3.2)-c em (3.2)-d, têm-se:

$$X_4 = A_3 A_2 A_1 A_0 X_0 - A_3 A_2 A_1 A_0 B_0 f_0 + A_3 A_2 A_1 B_0 f_1 + A_3 A_2 A_1 M_0 R_0 - A_3 A_2 A_1 B_1 f_1 + A_3 A_2 A_1 f_2 + A_3 A_2 M_1 R_1 - A_3 A_2 B_2 f_2 + A_3 B_2 f_3 + A_3 M_2 R_2 - A_3 B_3 f_3 + B_3 f_4 + M_3 R_3 \quad (3.3)$$

Uma forma geral permite escrever a equação (3.3) com  $n = 4$  como:

$$X_4 = \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot X_0 - \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot B_0 \cdot f_0 + \left[ \prod_{k=n-1}^1 A_k \right] \cdot (B_0 - B_1) \cdot f_1 + \left[ \prod_{k=n-1}^2 A_k \right] \cdot (B_1 - B_2) \cdot f_2 + \left[ \prod_{k=n-1}^3 A_k \right] \cdot (B_2 - B_3) \cdot f_3 + B_{n-1} \cdot f_n + B_{n-1} \cdot f_n + \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^{m+1} A_k \right] \cdot M_m R_m \quad (3.4)$$

Manipulando a equação (3.4) ainda pode-se escrever:

$$X_4 = \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot X_0 - \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot B_0 \cdot f_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^m A_k \right] \cdot (B_{m-1} - B_m) \cdot f_m + \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^{m+1} A_k \right] \cdot M_m R_m \quad (3.5)$$

Considerando ainda que:

$$f_m = C_m \cdot f_0 \quad (3.6)$$

A equação (3.5) é escrita como mostrado na equação (2.46):

$$X_4 = \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot X_0 - \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot B_0 \cdot f_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^m A_k \right] \cdot (B_{m-1} - B_m) \cdot C_m \cdot f_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^{m+1} A_k \right] \cdot M_m R_m \quad (3.7)$$

Analisando-se a equação (3.7) para as condições necessárias:

$$\left. \begin{aligned} X_{i+4} = X_i &\Rightarrow X_4 = X_0 \\ \tau_{i+4} = \tau_i + T &\Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \\ \tau_{i+2} = \tau_i + \frac{T}{2} &\Rightarrow \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Tornando-se então:

$$X_0 = \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot X_0 - \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot B_0 \cdot f_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^m A_k \right] \cdot (B_{m-1} - B_m) \cdot C_m \cdot f_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^{m+1} A_k \right] \cdot M_m R_m \quad (3.9)$$

Daí:

$$\left\{ I - \prod_{k=n-1}^0 A_k \right\} \cdot X_0 = - \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot B_0 \cdot f_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^m A_k \right] \cdot (B_{m-1} - B_m) \cdot C_m \cdot f_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^{m+1} A_k \right] \cdot M_m R_m \quad (3.10)$$

Da equação (3.10), verifica-se:

$$P \cdot X_0 = Q \cdot f_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{R}_m \cdot C_m \cdot f_0 + S \quad (3.11)$$

Onde:

$$P = \left\{ I - \prod_{k=n-1}^0 A_k \right\} \quad (3.12)\text{-a}$$

$$Q = - \left[ \prod_{k=n-1}^0 A_k \right] \cdot B_0 \quad (3.12)\text{-b}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_m = \left[ \prod_{k=n-1}^m \mathbf{A}_k \right] \cdot (\mathbf{B}_{m-1} - \mathbf{B}_m) \quad (3.12)\text{-c}$$

$$\mathbf{S} = \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \prod_{k=n-1}^{m+1} \mathbf{A}_k \right] \cdot \mathbf{M}_m \mathbf{R}_m \quad (3.12)\text{-d}$$

O termo  $\mathbf{C}_m$  conforme a equação (3.12)-e

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \cos(r_k \cdot 2\pi) & -\text{sen}(r_k \cdot 2\pi) \\ \text{sen}(r_k \cdot 2\pi) & \cos(r_k \cdot 2\pi) \end{bmatrix} \quad (3.12)\text{-e}$$

Deve-se agora, impor na equação (3.11) as restrições:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\mathbf{R}}_m \cdot \mathbf{C}_m \right\} \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{P}^{-1} \cdot \{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \nu_0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Sendo  $n = \text{numerodetransições}$  e as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_m$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{C}_m$  determinadas respectivamente pelas equações (3.12)-a, (3.12)-b, (3.12)-c, (3.12)-d e (3.12)-e.

Da equação (3.12)-e, para o caso simétrico, tem-se que:

$$r_k = \frac{k}{n}, \quad k = n, \dots, 1 \quad (3.14)$$

Onde  $n$  é o número de transições em um período  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ , já que:

$$\begin{cases} \tau_k = \tau_0 + r_k \cdot T \\ \tau_n = \tau_0 + T \end{cases}, n > 0 \text{ e } k = n, \dots, 1 \quad (3.15)$$

Para calcular as condições de fase do movimento, segue o procedimento utilizado. Voltando a equação (3.13), faz-se:

$$x_0 = T \cdot f_0 + P^{-1} \cdot \{S\} \quad (3.16)$$

E define-se uma matriz  $T$ , que de forma geral pode ser escrita como:

$$T = P^{-1} \cdot \left\{ Q + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{R} \cdot C_m \right\} \quad (3.17)$$

as matrizes  $P$ ,  $Q$ ,  $\tilde{R}_m$ ,  $S$  e  $C_m$  determinadas respectivamente pelas equações (3.12)-a, (3.12)-b, (3.12)-c, (3.12)-d e (3.12)-e.

Na equação (3.16) ainda tem-se o termo  $P^{-1} \cdot \{S\}$  que pode ser definido como uma matriz  $\gamma$ :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_\varepsilon \\ \gamma_v \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \{S\} \quad (3.18)$$

Logo, com as relações em (3.16), (3.17) e (3.18), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ v_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \omega \cdot \tau_0 \\ \sin \omega \cdot \tau_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \gamma_\varepsilon \\ \gamma_v \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Resolvendo as equações (3.19), tem-se:

$$t_{11} \cdot \cos(\omega\tau_0) + t_{12} \cdot \sin(\omega\tau_0) + \gamma_\varepsilon = \varepsilon \quad (3.20)-a$$

$$t_{21} \cdot \cos(\omega\tau_0) + t_{22} \cdot \sin(\omega\tau_0) + \gamma_v = v_0 \quad (3.20)-b$$

As equações (3.20)-a e (3.20)-b ainda podem ser escritas como:



$$t_{11} \cdot \cos(\omega\tau_0) + t_{12} \cdot \text{sen} \cos(\omega\tau_0) = \delta_\varepsilon = \varepsilon - \gamma_\varepsilon \quad (3.21)\text{-a}$$

$$t_{21} \cdot \cos(\omega\tau_0) + t_{22} \cdot \text{sen} \cos(\omega\tau_0) = \delta_v = v_0 - \gamma_v \quad (3.21)\text{-b}$$

Onde  $t_{ij}$  é o termo da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna da matriz  $T$ .

É necessária que a relação  $(\cos \omega\tau_0)^2 + (\text{sen} \omega\tau_0)^2 = 1$  também seja satisfeita. Daí, da equação (3.21) tem-se a seguinte solução para a fase:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega\tau_0) &= \alpha \cdot \eta \pm \beta \cdot \sqrt{1-\eta^2} \\ \text{sen}(\omega\tau_0) &= \beta \cdot \eta \mp \alpha \cdot \sqrt{1-\eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Onde:

$$\eta = \frac{x_0}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}}; \quad \alpha = \frac{t_{11}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}}; \quad \beta = \frac{t_{12}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (3.23)$$

Deve-se notar que a condição de existência do padrão de movimento indicado depende do termo  $\sqrt{1-\eta^2}$ , que deve ser positivo ou nulo para que  $\cos \omega\tau_0$  e  $\text{sen} \omega\tau_0$ , sejam reais. Veja-se que a condição necessária  $(\cos \omega\tau_0)^2 + (\text{sen} \omega\tau_0)^2 = 1$  para qualquer valor de  $\eta$ . Então, para que o movimento estudado exista, a condição (necessária, mas não suficiente) em (3.24) deve ser satisfeita:

$$\eta^2 \leq 1 \quad (3.24)$$

De posse das condições de fase na equação (3.22), a equação (3.21)-b fornecerá a velocidade necessária, completando as condições de existência do padrão de movimento, de forma que se pode escrever:

$$v_0 = (\alpha \cdot t_{21} + \beta \cdot t_{22}) \cdot \eta + (\pm \alpha \cdot t_{21} \mp \beta \cdot t_{22}) \cdot \sqrt{1-\eta^2} \quad (3.25)$$

Após, é necessário calcular a região de existência do movimento que obedeça a relação presente em (3.24). Para isso, definiu-se um  $\eta_{cr}$ .

### 3.2 REGIÃO DE EXISTÊNCIA DE TRANSIÇÕES NO MOVIMENTO LINEAR

Das equações (2.29), tem-se de  $A_c$  e  $A_s$  que:

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2\right)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}} \quad (3.26)$$

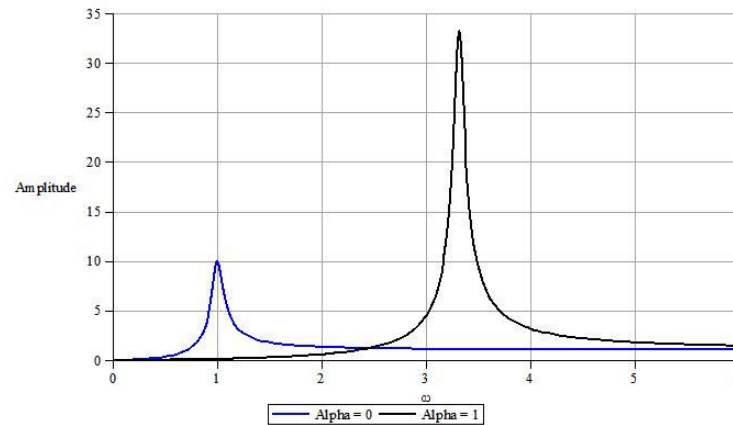
A equação (3.26) representa a amplitude máxima para o regime permanente no intervalo linear. As condições  $z - s > \Delta$  são consideradas nessa equação, ou seja,  $\alpha = 1$ .

A equação (3.27) a seguir leva em consideração a possibilidade de transição para a condição  $z - s < \Delta$ , ou seja,  $\alpha = 0$ :

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \quad (3.27)$$

Com isso, na região em que a folga não excede a amplitude do movimento do sistema linear, para  $z - s < \Delta$ , existe a possibilidade de transições.

A curva limite para que transições ocorram para  $\xi = 0,05$ ,  $r_c = 0$  e  $r_k = 10$  e apresentada na Figura 3.1:



**Figura 3.1:** Amplitude Máxima do sistema linear para  $\xi = 0,05$ .

A **Tabela 1** a seguir mostra os padrões de movimento conforme os parâmetros iniciais definidos nas Figuras 2.2 a Figura 2.13. Nas colunas  $X_i$ ,  $i = 0,1,2,3,4$ , os valores representam, respectivamente, a posição e a velocidade, ou seja, o estado de movimento em cada transição.

Pode-se verificar também que:  $X_4 = X_0$  e  $X_2 = -X_0$ , ou seja, o padrão de movimento é periódico.

Tabela 1 - Padrão dos movimentos com a imposição das condições de existência.

Movimento	$\xi$	$\omega$	$\varepsilon$	$r_c$	$r_k$	X0	X1	X2	X3	X4
1 - 6	5/100	1	5/10	0	10	[0.500000107] [0.847019678]	[0.1352843123] [0.3968379842]	[-0.4999999311] [-0.8470198740]	[-0.1352842518] [-0.3968378602]	[0.5000000490] [0.8470198085]
2 - 10	5/100	1	4/10	0	10	[0.400000016] [0.597310721]	[0.1059530863] [0.3912558756]	[-0.3999999892] [-0.5973107285]	[-0.1059530800] [-0.3912558492]	[0.4000000148] [0.5973107173]
1 - 6	5/100	1	3/10	0	10	[0.300000007] [0.377796338]	[0.07747701773] [0.3579304985]	[-0.2999999924] [-0.3777963426]	[-0.07747701293] [-0.3579304814]	[0.3000000073] [0.3777963338]
1 - 8	5/100	1	2/10	0	10	[0.200000001] [0.1718875683]	[0.04938627946] [0.3121040832]	[-0.1999999896] [-0.1718875669]	[-0.04938627534] [-0.3121040542]	[0.2000000156] [0.1718875576]
NP	5/100	1	1/10	0	10	[0.100000023] [-0.02456797]	[0.02156327318] [0.2575918967]	[-0.0999999881] [0.02456797848]	[-0.02156326861] [-0.2575918634]	[0.1000000159] [-0.02456798796]
NP	5/100	1	5/10	0	100	[0.500000003] [0.301736154]	[0.4746864916] [-0.2706461037]	[-0.5000000040] [-0.3017361565]	[-0.4746864879] [0.2706461019]	[0.499999993] [0.3017361496]
1 - 8	5/100	1	3/10	0	100	[0.299999995] [0.095514734]	[0.2799526233] [-0.08132459959]	[-0.2999999978] [-0.0955147375]	[-0.2799526181] [0.0813245966]	[0.2999999921] [0.09551472970]
NP	5/100	1	2/10	0	100	[0.199999998] [-0.007466498]	[0.1825930352] [0.01321343091]	[-0.2000000010] [0.007466499193]	[-0.1825930341] [-0.01321343370]	[0.1999999954] [-0.00746650306]
1 - 12	5/100	1	1/10	0	100	[0.100000001] [-0.110361784]	[0.08523833637] [0.1076700155]	[-0.09999999722] [0.1103617894]	[-0.08523833890] [-0.1076700154]	[0.09999999431] [-0.1103617905]
1 - 6	5/100	1	1/10	0	10	[[0.100000009] [-0.145879479]	[[0.02593749350] [0.1308732358]	[-0.0999999492] [0.1458794692]	[-0.02593748699] [-0.1308731723]	[0.1000000050] [-0.1458794820]
1 - 8	5/100	1	1/100	0	100	[0.009999998] [-0.209965866]	[-0.001942952338] [0.1846565266]	[-0.009999999] [0.209965874]	[0.001942951388] [-0.1846565297]	[0.009999992] [-0.209965875]
1 - 4	5/100	1	5/10	0	1	[0.499999998] [-1.136180561]	[-1.151030592] [-0.1231548405]	[-0.5000000003] [1.136180562]	[1.151030594] [0.1231548393]	[0.499999972] [-1.136180567]

### 3.3 REGIÃO DE EXISTÊNCIA DE MOVIMENTO SIMÉTRICO 1-4

Com a equação para  $\eta$  em (3.23) e a equação (3.26), define-se:

$$\eta_{cr} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2\right)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (3.27)$$

A equação de  $\eta_{cr}$  vai depender de  $\omega$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$ ,  $r_c$  e  $r_k$ . Deve-se verificar para quais valores de  $r_k$  a equação pode ser satisfeita dados os demais parâmetros.

Seguindo esta metodologia, diversas topologias de movimentos podem ser analisadas.

Da equação (3.27) têm-se os termos:

$$t_1 = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left((1 + \alpha \cdot r_k) - \omega^2\right)^2 + (2\xi(1 + \alpha \cdot r_c)\omega)^2}} \quad (3.28)$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (3.29)$$

Na Figura 3.2 é plotado cada termo acima,  $t_1$  e  $t_2$ .

Na Figura 3.3 é plotado diretamente a multiplicação de  $t_1$  e  $t_2$ , ou seja,  $\eta_{cr}$ .

Pode-se perceber que a condição de  $\eta^2 \leq 1$  é sempre obedecida conforme (3.24)

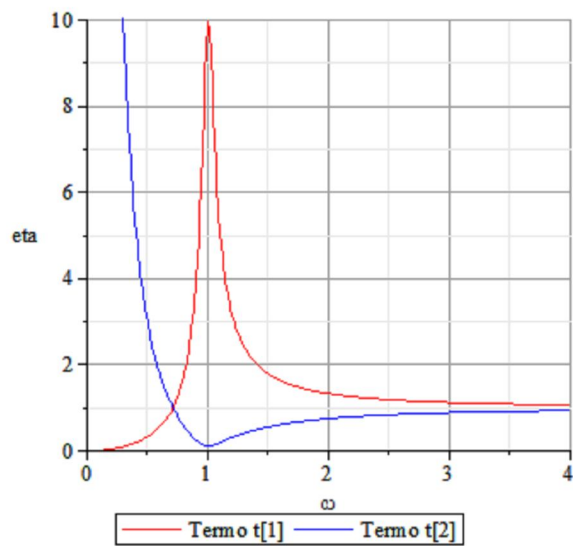


Figura 3.2: Termo  $t_1$  e  $t_2$  com variação de  $\omega$ .

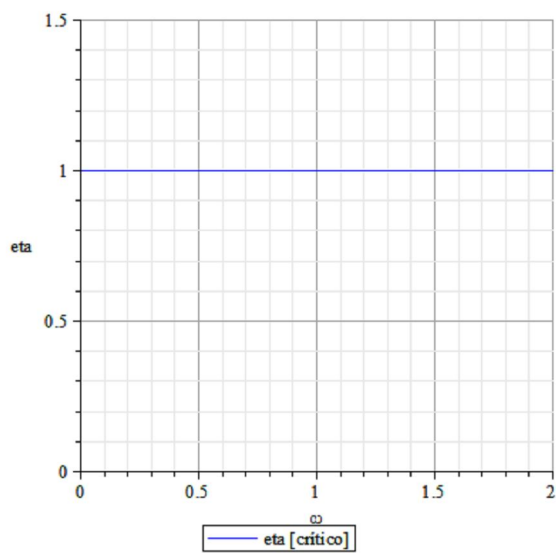
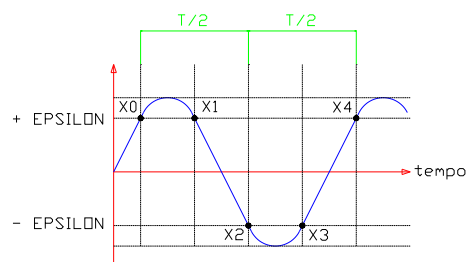


Figura 3.3: Variação de  $\eta_{cr}$  em função de  $\omega$ .

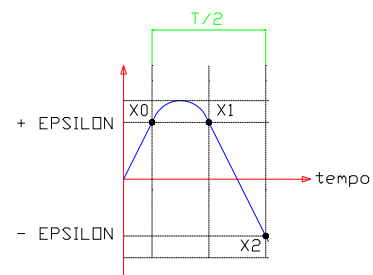
## 4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Neste capítulo é analisada a estabilidade de movimentos para determinados parâmetros do sistema. O objetivo é demonstrar a aplicação dos mapas apresentados nos capítulos 2 e 3.

Para o movimento de topologia adotado conforme Figura 4.1, movimento simétrico em 1-4, e verificado a simetria em  $T/2$  - Figura 4.2, é necessário que se estabeleça a estabilidade do movimento no semi-período para que a estabilidade do movimento seja atendida.



**Figura 4.1:** Padrão de movimento 1-4 com  $x_{i+4} = +x_i$ .



**Figura 4.2:** Semi-Período com  $x_{i+2} = -x_i$ .

### 4.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA MOVIMENTO 1-4 SIMÉTRICO

Suponhamos  $X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix}$ , isto é, estado numa transição. O estado na próxima

transição, ou seja,  $\tau_{i+1}$  é dado por:

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} x_{i+1}(\tau_{i+1}, \tau_i, v_i) \\ v_{i+1}(\tau_{i+1}, \tau_i, v_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

desde que se deseja um movimento 1-4 simétrico.

Tem-se que:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{i+1} = \tau_{i+1}(x_i, v_i, \tau_i) &\Rightarrow \tau_1 = \tau_1(x_0, v_0, \tau_0) \\ v_{i+1} = v_{i+1}(x_i, v_i, \tau_i) &\Rightarrow v_1 = v_1(x_0, v_0, \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Como definido no Capítulo 2.4,  $X_{i+2} = -X_i$ , a análise de estabilidade para o movimento 1-4 realizada em  $T/2$  e derivando os dois lados da equação (4.1), para a análise da estabilidade de um movimento, tem-se:

$$\left[ \frac{\partial X_{i+2}}{\partial(\tau_i, v_i)} \right] = \frac{\partial}{\partial(\tau_i, v_i)} \begin{bmatrix} x_{i+2} \\ v_{i+2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

que resulta:

$$\left[ \frac{\partial X_{i+2}}{\partial \tau_i} \quad \frac{\partial X_{i+2}}{\partial v_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{i+2}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial x_{i+2}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial v_{i+2}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial v_{i+2}}{\partial v_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial v_{i+2}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial v_{i+2}}{\partial v_i} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A solução da equação (4.4) fornecerá as seguintes derivadas:

–  $\left[ \frac{\partial \tau_{i+2}}{\partial \tau_i} \right]$  e  $\left[ \frac{\partial \tau_{i+2}}{\partial v_i} \right]$ , obtidas a partir da primeira linha; e

– com as soluções do item anterior, substitui-se nas equações  $\left[ \frac{\partial v_{i+2}}{\partial \tau_i} \right]$  e  $\left[ \frac{\partial v_{i+2}}{\partial v_i} \right]$ ,

que são obtidas na segunda linha.

Para o movimento de topologia 1-4 simétrico, na equação (2.32), a equação (4.3) torna-se:



$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \tau_2}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial v_2}{\partial v_0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Onde  $\mathbf{D}$  é a matriz de estabilidade e os termos da equação (4.5) são definidos como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \tau_2}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial v_2}{\partial v_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \tau_1}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \tau_0} & \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Resolvendo o lado direito da igualdade na equação (4.6) e igualando à equação (4.5) têm-se os termos da matriz  $\mathbf{D}$ :

$$d_{11} = \left. \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0} + \frac{\partial \tau_2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_0} \right\} \quad (4.7)\text{-a}$$

$$d_{12} = \left. \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial v_0} + \frac{\partial \tau_2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \right\} \quad (4.7)\text{-b}$$

$$d_{21} = \left. \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_0} \right\} \quad (4.7)\text{-c}$$

$$d_{22} = \left. \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial v_0} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \right\} \quad (4.7)\text{-d}$$

Pela condição de periodicidade do movimento 1-4 considerado, traz-se que:

$$\left. \begin{aligned} x_0 = x_1 = \varepsilon \Rightarrow x_2 = -x_0 = -\varepsilon \\ v_2 = -v_0 \\ \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Os autovalores da equação (4.5) devem estar contidos dentro de um círculo de raio unitário, para que, com determinados parâmetros, o sistema seja estável, e podem ser calculados conforme a equação (4.9).

Determinam-se as raízes da matriz  $\mathbf{D}$  conforme Shaw e Holmes [Shaw–1983], isto é,

$$\lambda_j = \frac{1}{2} \cdot \left( |\text{Tr}(\mathbf{D})| \pm \sqrt{|\text{Tr}(\mathbf{D})|^2 - 4 \cdot \Delta|\mathbf{D}|} \right) \quad (4.9)$$

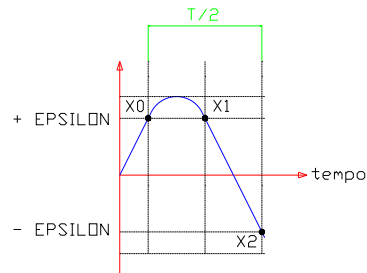
onde  $|\text{Tr}(\mathbf{D})|$  e  $\Delta|\mathbf{D}|$  são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz  $\mathbf{D}$ .

Os possíveis autovalores representados na equação (4.9) levam, para determinados parâmetros escolhidos, aos seguintes resultados para o sistema:

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_j| < 1 \Rightarrow \textit{estável} \\ |\lambda_j| > 1 \Rightarrow \textit{instável} \\ |\lambda_j| = 1 \Rightarrow \textit{centro} \end{aligned} \right\}, \quad (4.10)$$

## 4.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA MOVIMENTO 1-4 SIMÉTRICO ESCOLHIDO

Levando em consideração a Figura 4.3 a seguir, tem-se:



**Figura 4.3:** Semi-Período com  $x_{i+2} = -x_i$ .

Para o período completo, tem-se:

$$x_{i+4} = x_i \Rightarrow x_4 = x_0 \quad (4.11)\text{-a}$$

$$\tau_{i+4} = \tau_i + T \Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (4.11)\text{-b}$$

Para o semi-período implica em:

$$\tau_{i+2} = \tau_i + \frac{T}{2} \Rightarrow \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \quad (4.12)$$

Logo, pode-se concluir da equação (4.12) que:

$$\frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_0} = 1 \quad (4.13)$$

A mesma definição vale para a velocidade definido na equação (4.8) que:

$$v_2 = -v_0 \quad (4.14)$$

A derivada será:

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_0} = -1 \quad (4.15)$$

Com essas definições, pode-se concluir que a Matriz  $D$  em (4.5) fica:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \tau_2}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau_0} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Logo, os termos da matriz  $D$  nas equações (4.7)-a, (4.7)-b, (4.7)-c e (4.7)-d ficarão:

$$d_{11} = 1 \quad (4.17)\text{-a}$$

$$d_{12} = \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial v_0} + \frac{\partial \tau_2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \quad (4.17)\text{-b}$$

$$d_{21} = \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_0} \quad (4.17)\text{-c}$$

$$d_{22} = -1 \quad (4.17)\text{-d}$$

Logo, o  $\text{Tr}(D) = -1$  e  $\Delta = \left( -1 + \left( \frac{\partial \tau_2}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \tau_0} \right) \right)$ .

A solução do termo  $\left( \frac{\partial \tau_2}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \tau_0} \right)$  ficará em função de  $f(\tau_2, \tau_1, \tau_0, \omega, \xi, \varepsilon)$ .

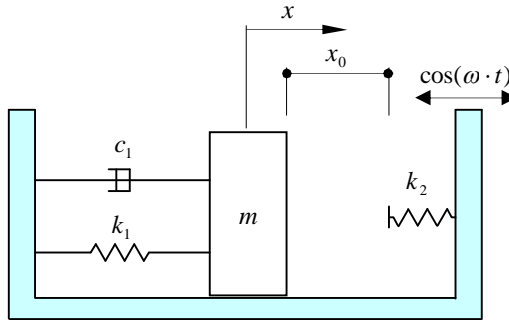
Logo, implicará que os autovalores  $\lambda_j$  da equação (4.9) com as condições em 4.10 também ficarão em função de:

$$\lambda_j = f(\tau_2, \tau_1, \tau_0, \omega, \xi, \varepsilon) \quad (4.18)$$

Ou seja, dependerão dos instantes de transição  $(\tau_2, \tau_1, \tau_0)$ , de  $\omega$ ,  $\xi$  e também de  $\varepsilon$ .

### 4.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM MOVIMENTO SEGUNDO SHAW E HOLMES [SHAW-1983]

O modelo proposto por Shaw e Holmes [Shaw-1983] segue abaixo conforme Figura 4.4:



**Figura 4.4:** Modelo proposto por Shaw e Holmes [Shaw-1983].

No modelo proposto, o determinante  $\Delta = (D)$  e  $\text{Tr} = |D|$  ficam conforme:

$$\Delta = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2\xi(\tau_2 - \tau_0)} \quad (4.19)\text{-a}$$

$$\text{Tr} = e^{-2\xi \frac{\pi}{\omega}} \cdot \left[ -s_+ \cdot s_- \cdot \left\{ \frac{(\omega_b^2 + \omega_a^2)}{\omega_b \cdot \omega_b} \right\} + 2 \cdot c_+ \cdot c_- \right] \quad (4.19)\text{-b}$$

Onde:

$$s_+ = \text{sen}(\omega_b(\tau_1 - \tau_0)) \text{ e } c_+ = \text{cos}(\omega_b(\tau_1 - \tau_0)) \quad (4.20)\text{-a}$$

$$s_- = \text{sen}(\omega_a(\tau_2 - \tau_1)) \text{ e } c_- = \text{cos}(\omega_a(\tau_2 - \tau_1)) \quad (4.20)\text{-b}$$

$$\omega_b \Rightarrow \text{frequência natural em } x < x_0 \quad (4.20)\text{-c}$$

$$\omega_a \Rightarrow \text{frequência natural em } x > x_0 \quad (4.20)\text{-d}$$

Shaw e Holmes [Shaw–1983] observaram que a conclusão sobre a estabilidade do movimento fica comprometida porque, nas equações (4.20)-a e (4.20)-b, o tempo  $\tau_1$  é desconhecido, embora se tenha imposto, pela topologia do movimento o lapso temporal  $(\tau_2 - \tau_0)$ . Para contornar esta dificuldade, Shaw e Holmes [Shaw–1983] determinaram  $\tau_1$  estipulando, com base empírica em resultados de simulação numérica, que:

$$(\tau_1 - \tau_0) = \frac{\pi \cdot \omega_n}{\omega \cdot \omega_b} \quad (4.21)\text{-a}$$

$$(\tau_2 - \tau_1) = \frac{\pi \cdot \omega_n}{\omega \cdot \omega_a} \quad (4.21)\text{-b}$$

Onde:

$$\omega_n = \frac{2 \cdot \omega_b \omega_a}{(\omega_b + \omega_a)} \quad (4.22)$$

Logo, com as equações (4.21)-a e (4.21)-b implica em:

$$\omega_b \cdot (\tau_1 - \tau_0) = \omega_a \cdot (\tau_2 - \tau_1) = \frac{\pi \cdot \omega_n}{\omega} \quad (4.23)$$

e,

$$s_+ = s_- = \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot \omega_n}{\omega}\right)^{\text{def}} = s, \quad c_+ = c_- = \text{cos}\left(\frac{\pi \cdot \omega_n}{\omega}\right)^{\text{def}} = c \quad (4.24)$$

Isto é o que chamaram de importante observação (39-40, p. 136), a partir da qual solucionaram o problema de autovalor do mapa.

Para os valores de  $\Delta = (D)$  e  $\text{Tr} = |D|$ , Shaw e Holmes [Shaw-1983] tomaram com importante observação que:

- (i) as equações (4.19)-a e (4.19)-b só poderiam valer quando  $x_0$  fosse pequeno em relação à Amplitude  $A$  do sistema proposto e;
- (ii) os autovalores  $\lambda_j$  definidos na equação (4.9) não dependem de  $x_0$ .

No modelo proposto na Figura 1.1 e nas equações (2.32), (2.33)-a, (2.33)-b, (2.33)-c, (2.36) e (2.37) dependem fortemente  $\varepsilon$ .

Com isso, a determinação de  $\Delta = (D)$  e  $\text{Tr} = |D|$ , proposto por Shaw e Holmes [Shaw-1983] não podem ser aplicadas ao modelo definido na Figura 1.1.

#### 4.4 ALTERNATIVA GENERALIZADA PARA AVALIAÇÃO DE ESTABILIDADE DO MOVIMENTO 1-4

Essa seção tem como objetivo apresentar uma alternativa geral no estudo da estabilidade do sistema proposto e, definido o tipo de movimento, um sistema geral.

Tomando a Figura 4.3 como exemplo, na determinação das derivadas parciais da matriz  $D$ ,  $\left[ \frac{\partial X_{i+2}}{\partial(\tau_i, v_i)} \right] = \frac{\partial(x_{i+2}, v_{i+2})}{\partial(\tau_i, v_i)}$ , os instantes de transição  $(\tau_1 - \tau_0)$  e  $(\tau_2 - \tau_1)$  não podem ser facilmente determinados. Como observado na Seção 4.3, a grande dificuldade do modelo proposto por Shaw e Holmes [Shaw-1983] está na determinação desses instantes de transição. As hipóteses de folga  $x_0 \ll A$ , conforme modelo da Figura 4.4, permitem aproximações para a determinação dos instantes  $(\tau_1 - \tau_0)$  e  $(\tau_2 - \tau_1)$ . Resulta, porém, que  $\Delta = (D)$  e  $\text{Tr} = |D|$  ficam independentes da folga  $\varepsilon$ , o que, no fundo, remete a uma contradição do ponto vista da física, isto é, da dinâmica do sistema.

No modelo proposto pela Figura 1.1, e as equações (2.32), (2.33)-a, (2.33)-b, (2.33)-c, (2.36) e (2.37) dependem fortemente  $\varepsilon$ .

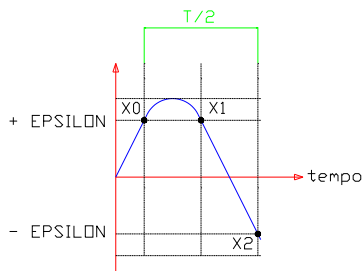
Relembrando das condições necessárias para um Movimento Simétrico 1-4, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} X_{i+4} = X_i &\Rightarrow X_4 = X_0 \\ \tau_{i+4} = \tau_i + T &\Rightarrow \tau_4 = \tau_0 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \\ \tau_{i+2} = \tau_i + \frac{T}{2} &\Rightarrow \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

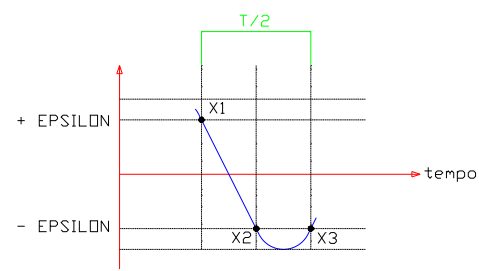
Porém, as condições nas equações definidas em (4.25) não permitem, de imediato, identificar as relações a seguir:

- $(\tau_1 - \tau_0)$ ;
- $(\tau_2 - \tau_1)$ .

Observando então, as Figuras 4.5 e 4.6, tomando os instantes de transição  $(\tau_2, \tau_1, \tau_0)$  em  $(X_2, X_1, X_0)$  e as condições impostas nas equações (4.25), pode-se observar o mesmo movimento de duas formas diferentes, ou seja,  $(\tau_3 - \tau_1) = \frac{T}{2}$  e  $(\tau_2 - \tau_0) = \frac{T}{2}$ :



**Figura 4.5:** Semi-Período com  $X_{i+2} = -X_i$ .



**Figura 4.6:** Semi-Período com  $X_{i+2} = -X_i$ .

Observando novamente a matriz de estabilidade  $\mathbf{D}$  na equação (4.6), podemos escrever novamente como:

$$D = \left| g_{ij} \right| \cdot \left| f_{ij} \right| \quad (4.26)$$

Logo, a equação (4.26) ficará:



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \tau_2}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial v_2}{\partial v_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Sabendo que os estados de transição  $X_0$ ,  $X_1$  e  $X_2$  são conhecidos, ou seja:

- Para  $X_0$ , temos:

$$X_0 \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \\ x_0, v_0, A_0 \\ a_1, a_2 \end{cases} \begin{cases} x_0 = \varepsilon \\ v_0 \\ f_0 = \begin{bmatrix} \cos(\omega \tau_0) \\ \text{sen}(\omega \tau_0) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.28)$$

- Para  $X_1$ , temos:

$$[0 \rightarrow 1] \Rightarrow X_1 \Rightarrow \alpha = 1 \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \\ x_1, v_1, A_1 \\ a_1, a_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = \varepsilon \\ v_1 \\ f_1 = \begin{bmatrix} \cos(\omega \tau_1) \\ \text{sen}(\omega \tau_1) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.29)$$

- Para  $X_2$ , temos:

$$[1 \rightarrow 2] \Rightarrow X_2 \Rightarrow \alpha = 0 \begin{cases} \gamma_1, \gamma_2 \\ x_2, v_2, A_2 \\ b_1, b_2 \end{cases} \begin{cases} x_2 = -x_0 = -\varepsilon \\ v_2 = -v_0 \\ f_2 = \begin{bmatrix} \cos(\omega \tau_2) \\ \text{sen}(\omega \tau_2) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.30)$$

Lembrando-se das equações (2.46) e (3.16):

$$f_i = \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot \tau_i) \\ \text{sen}(\omega \cdot \tau_i) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$X_i = T \cdot f_i + P^{-1} \cdot \{S\} \quad (4.32)$$

Pode-se facilmente determinar os instantes  $\tau_i$ :

$$\begin{cases} x_0 \Rightarrow f_0 \Rightarrow \tau_0 \\ x_1 \Rightarrow f_1 \Rightarrow \tau_1 \\ x_2 \Rightarrow f_2 \Rightarrow \tau_2 \\ x_3 \Rightarrow f_3 \Rightarrow \tau_3 \\ x_4 \Rightarrow f_4 \Rightarrow \tau_4 \rightarrow x_0 = x_4 \end{cases} \quad (4.33)$$

Essa determinação é possível devido à imposição das condições de existência no movimento do tipo 1-4.

Agora, conhecendo os valores de  $\tau_i$ , conforme a equação (4.33), os elementos  $g_{ij}$  e  $f_{ij}$  ficam conforme a seguir:

- Para  $g_{ij}$ , temos:

$$g_{11} = \frac{b_1(e^{\gamma_1(\tau_2-\tau_1)} - e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)})}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{v_1 \cdot e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)}}{v_2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)} \quad (4.34)$$

$$g_{12} = \frac{e^{\gamma_1(\tau_2-\tau_1)} - e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)}}{v_2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)} \quad (4.35)$$

$$g_{21} = \frac{-b_1 \gamma_1 \cdot e^{\gamma_1(\tau_2-\tau_1)} - (v_1 - b_1) \gamma_2 \cdot e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)}}{\gamma_2 - \gamma_1} + A_2 \left( \frac{b_1(e^{\gamma_1(\tau_2-\tau_1)} - e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)})}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{v_1 \cdot e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)}}{v_2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)} \right) \quad (4.36)$$

$$g_{22} = -\frac{\gamma_1 \cdot e^{\gamma_1(\tau_2-\tau_1)} - \gamma_2 \cdot e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)}}{v_2(\gamma_2 - \gamma_1)} + \frac{A_2 \cdot (e^{\gamma_1(\tau_2-\tau_1)} - e^{\gamma_2(\tau_2-\tau_1)})}{v_2(\gamma_2 - \lambda_1)} \quad (4.37)$$

- Para  $f_{ij}$ , temos:

$$f_{11} = \frac{a_1(e^{\lambda_1(\tau_1-\tau_0)} - e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)})}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{v_0 \cdot e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)}}{v_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (4.38)$$

$$f_{12} = \frac{e^{\lambda_1(\tau_1-\tau_0)} - e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)}}{v_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (4.39)$$

$$f_{21} = \frac{-a_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1(\tau_1-\tau_0)} - (v_0 - a_1) \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)}}{\lambda_2 - \lambda_1} + A_1 \cdot \left( \frac{a_1(e^{\lambda_1(\tau_1-\tau_0)} - e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)})}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{v_0 \cdot e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)}}{v_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \quad (4.40)$$

$$f_{22} = -\frac{\lambda_1 \cdot e^{\lambda_1(\tau_1-\tau_0)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)}}{v_1(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{A_1 \cdot (e^{\lambda_1(\tau_1-\tau_0)} - e^{\lambda_2(\tau_1-\tau_0)})}{v_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (4.41)$$

Agora sim, de acordo com o modelo proposto por Shaw e Holmes [Shaw-1983], temos:

$$\lambda_j = \frac{1}{2} \cdot \left( |\text{Tr}(\mathbf{D})| \pm \sqrt{|\text{Tr}(\mathbf{D})|^2 - 4 \cdot \Delta |\mathbf{D}|} \right) \quad (4.42)$$

Sendo que o  $\Delta = |\mathbf{D}|$  e  $\text{Tr} = |\mathbf{D}|$  podem ser encontrados como:

$$\Delta = \det(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \det(\mathbf{g}) \cdot \det(\mathbf{f}) \quad (4.43)$$

e

$$\text{Tr} = g_{11} \cdot f_{11} + g_{12} \cdot f_{21} + g_{21} \cdot f_{12} + g_{22} \cdot f_{22} \quad (4.44)$$

## 5. CONCLUSÃO

### 5.1 CONCLUSÕES

O equacionamento foi apresentado no formato de espaço-estado, possibilitando melhor visualização e análise do comportamento do fenômeno de vibro-impacto.

A análise do sistema no espaço-estado através da metodologia apresentada permite que as equações sejam escritas de forma mais condensada. Além disto, os mapas que relacionam os estados do sistema nos instantes de transição podem ser computados de forma mais evidente.

A existência de movimentos periódicos de ordem mais alta, com grande número de transições por período ficou mostrada neste trabalho, como se pode ver no Capítulo 2.

A existência de movimento de topologia 1-4 simétrico (ordem 1 com 4 transições por período) fica condicionada a movimentos simétricos no período. Conforme mostrado no Capítulo 2. Não foi encontrada na literatura demonstração da impossibilidade de movimentos assimétricos com esta topologia.

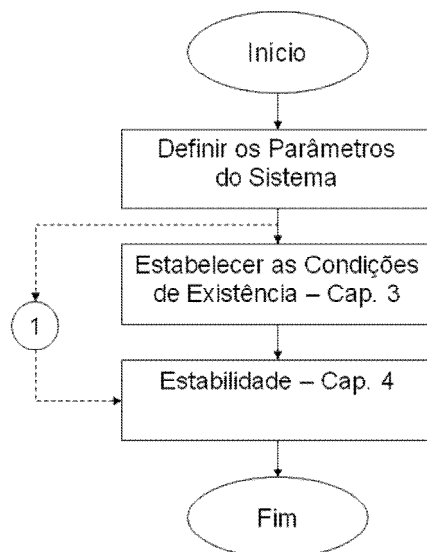
A análise de diversas topologias pode ser obtida por meio da aplicação do mapa geral apresentado, sendo que, o mapa é similar para a mesma quantidade de transições por período, portanto, é preciso apenas a determinação da razão  $r_k$ , na qual já pode vir inclusa a ordem do movimento. Assim, podem ser apresentadas as condições de existência e estabilidade destes movimentos.

O método de otimização da simulação permite, por meio de apropriadas condições iniciais, obter um movimento periódico logo após a primeira transição. Já a obtenção da topologia de interesse, depende se o movimento existe e é estável para determinados parâmetros do sistema.

No que se refere ao movimento periódico de topologia 1-4 simétrico, procede-se uma comparação com a metodologia de Shaw & Holmes, largamente referenciada na literatura. Demonstra-se, todavia, que os pressupostos daquela metodologia de

análise só permitem sua aplicação em situações muito particulares, quando a mola que só atua após o movimento ultrapassar a folga  $\varepsilon$  tem uma pequena deflexão em relação à própria folga. Isto mostra porque a análise de estabilidade do movimento proposto por Shaw & Holmes não depende da própria folga  $\varepsilon$ , permitindo uma expressão em forma fechada. Aborda-se este ponto porque, a despeito das muitas referências ao trabalho de Shaw & Holmes, não foi encontrada nenhuma referência a este ponto em particular, ponto que o autor reputa muito importante e ao qual se deve dedicar mais atenção em trabalhos futuros.

Outro ponto a ser considerado no presente trabalho é o estabelecimento das Condições de Existência, conforme Capítulo 3, antes de se estabelecer as Condições de Estabilidade. A Figura 5.1, a seguir, mostra outra diferença adotada por Shaw & Holmes, em que os esforços na obtenção das Condições de Estabilidade foram adotados sem que as Condições de Existência fosse devidamente determinadas, como pode ser visto pelo caminho 1 em tracejado.



**Figura 5.1:** Fluxograma proposto.

## 5.2 SUGESTÕES DE TRABALHO FUTURO

Sem perda da estrutura apresentada, pode-se analisar o sistema estudado sob condição de folga assimétrica.

Pode-se explorar a estrutura algébrica, de forma a exibir algum padrão da matriz **D** de estabilidade.

Pode-se ainda adotar um modelo de colisão mais complexo, ou que tente chegar o mais próximo possível da condição real.

Avaliar a aplicabilidade, em engenharia, dos efeitos de dissipação de energia nas diferentes topologias. Talvez esta informação possa ser importante para ajuste de absorvedores de vibração por impacto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] [Aguirre-2000] AGUIRRE, L. A.. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.
- [02] [Babitsky-2007] BABITSKY, V. I.; SOKOLOV, I. J.. Autoresonant homeostat concept for engineering application of nonlinear vibration modes. **Nonlinear Dyn**, 50, p.447-460, 2007.
- [03] [Barbosa-2009] BARBOSA, D. A.. **Análise de Movimentos Periódicos em Sistemas com Vibro-Impacto Harmonicamente Excitados**. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.
- [04] [Bazhenov-2009] BAZHENOV, V. A.; POGORELOVA, O. S.; POSTNIKOVA, T. G.; GONCHARENKO, S. N.. Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems. **Strength of Materials**, 41(4), p.392-398, 2009.
- [05] [Brindeu-2000] BRÂNDEU, L.. Stability of the periodic motions of the vibro-impact systems. **Chaos, Solitons and Fractals**, 11, p.2493-2503, 2000.
- [06] [Chatterjee-1997] CHATTERJEE, S.. **Rigid body collisions: some general considerations, new collisions law, and some experimental data**. 193 f. Tese (Doutorado) - Cornell University, 1997.
- [09] [Hinrichs-1997] HINRICHS, N.; OESTREICH, M.; POPP, K.. Dynamics of oscillators with impact and friction. **Chaos, Solitons & Fractals**, 8(4), p.535-558, 1997.
- [10] [Janin-2002] JANIN, O.; LAMARQUE, C. H.. Stability of singular periodic motions in a vibro-impact oscillator. **Nonlinear Dynamics**, 28, p.231-241, 2002.
- [11] [Kovaleva-2004] KOVALEVA, A.. Stochastic dynamics of flexible systems with

- motion limiters. **Nonlinear Dynamics**, 36, p.313-327, 2004
- [12] [Luo-2004] LUO, G. W.; XIE, J. H.. Stability of periodic motion, bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibratory system with symmetrical rigid stops. **Journal of Sound and Vibration**, 273, p.543-568, 2004.
- [13] [Luo-2008] LUO, G.; XIE, J.; ZHU, X.; ZHANG, J.. Periodic motions and bifurcations of a vibro-impact system. **Chaos, Solitons and Fractals**, 36, p.1340-1347, 2008.
- [14] [Mattos-1998] MATTOS, M. C.. **Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibroimpacto Devidas a Variações da Folga**. 145 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [15] [Mitić-1997] MITIĆ, S.. Dynamics of the Duffing oscillator with impacts. **Scientific Journal Facta Universitatis**, 1(2), p.65-72, 1997.
- [16] [Moon-2004] MOON, F. C.. **Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
- [17] [Norton-2007] NORTON, R. L.. **Machine design: an integrated approach**. Upper Saddle River: Prentice-hall, 2007.
- [18] [Popp-1998] POPP, K.. Non-smooth mechanical systems - an overview. **Forsch Ingenieurwes**, 64, p.223-229, 1998.
- [19] [Shaw-1983] SHAW, S. W.; HOLMES, P. J.. A periodically forced piecewise linear oscillator. **Journal of Sound and Vibration**, 90(1), p.129-155, 1983.
- [20] [Sinha-2001] SINHA, S. C.; DAVID, A.. Parametric excitation. In: BRAUN, S. G. (Comp.). **Encyclopedia of Vibration**. Oxford: Elsevier, p. 1001-1009, 2001.
- [21] [Sosnovskiy-2007] SOSNOVSKIY, L. A.; SHERBAKOV, S. S.. Vibro-impact in rolling contact. **Journal of Sound and Vibration**, 308, p.489-503, 2007.



- [22] [Strogatz-1994] STROGATZ, S. H.. **Nonlinear dynamics and chaos:** with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Cambridge: Perseus Books, 1994.